子空间跟踪算法在热模态问题中的应用研究

周昊天[1]，赵　婕[1]，曹为政[2]，史晓鸣[3]，于开平[1]
（1.哈尔滨工业大学 航天学院，黑龙江 哈尔滨 150001；2.黑龙江科技大学 计算机与信息工程学院，黑龙江 哈尔滨 150022；3.上海机电工程研究所，上海 201109）

摘　要：总结子空间跟踪算法识别模态参数的一般步骤。对一个有理论参考解的时变两自由度系统进行仿真，利用添加不同量级噪声的响应数据对系统进行辨识。辨识结果表明：基于新信息准则的子空间跟踪算法拥有较好的抗噪能力。对飞行器舵面结构进行受控快速加热，辨识快速升温过程中的模态参数。辨识结果表明：子空间跟踪算法可用于热模态辨识，有一定的工程应用价值。

关键词：子空间跟踪；热模态；模态试验；时变结构；模态参数辨识；新信息准则；飞行器；舵面结构
中图分类号：TB123，N945.14　　**文献标志码**：A　　**DOI**：10.19328/j.cnki.1006-1630.2018.04.013

Application of Subspace Tracking Algorithm in Thermo-Mode Identification

ZHOU Haotian[1], ZHAO Jie[1], CAO Weizheng[2], SHI Xiaoming[3], YU Kaiping[1]
(1. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, Heilongjiang, China; 2. College of Computer and Information Engineering, Heilongjiang University of Science and Technology, Harbin 150022, Heilongjiang, China; 3. Shanghai Electromechanical Engineering Institute, Shanghai 201109, China)

Abstract: The general procedure of modal parameter identification by use of subspace tracking algorithm is reviewed in this paper. A two degree-of-freedom spring-mass model with theoretical reference solution is simulated. In order to evaluate anti-noise abilities of different algorithms, the simulation acceleration responses with factitiously added random noise are used for identification. The identified results show that the anti-noise ability of subspace tracking algorithm based on novel information criterion (NIC) is better compared to other three methods. The thermo-modal test with controlled heating procedure for a rudder is carried out. The identification results show that the subspace tracking algorithm is suitable for thermo-modal analysis.

Keywords: subspace tracking; thermo-mode; modal test; time-varying structure; modal parameter identification; novel information criterion; flight vehicle; rudder structure

0　引言

近年来，高超声速飞行器因其在速度上的巨大优势而受到研究和应用领域的广泛关注[1]，以高超声速飞行器为背景的研究成为各领域的研究热点。高超声速飞行器的高速特性也给各领域的研究带来了诸多挑战[2]。如何辨识在气动加热环境下结构的模态参数是结构动力学领域遇到的挑战之一。处于飞行状态的飞行器模态参数的辨识问题一直备受关注[3]，因无法获知其所受外载荷的详细信息，故一般采用运行模态分析(OMA)方法。此外，由于飞行器的热环境随飞行状态的改变而改变[4]，结构的动力学特性也随时间的变化而变化，因而需要用时变模态参数辨识方法解决这一问题。

子空间跟踪方法是众多时变模态参数辨识方法中常用的一类方法。文献[5]提出了基于快速近似子空间跟踪(FAST)的时变模态参数辨识方法，对

收稿日期：2017-10-13；**修回日期**：2018-01-10
基金项目：国家自然科学基金(11372084)；上海航天科技创新基金(SAST2015012)
作者简介：周昊天(1989—)，男，博士研究生，主要研究方向为时变模态参数辨识。
通信作者：赵　婕(1978—)，女，博士，副教授，主要研究方向为飞行器动力学与控制。

一三连杆系统进行了辨识;文献[6-7]引入了投影估计子空间跟踪(PAST)算法,对二连杆和移动质量-简支梁进行了辨识;文献[8]引入了自然幂迭代(NPI)和估计幂迭代(API)方法,对弹簧-质量两自由度系统和移动质量-悬臂梁系统进行了辨识;文献[9-10]利用改进的 API 方法对一二连杆机构和一个卫星模型进行了辨识;此外,还有基于新信息准则(NIC)的子空间跟踪算法[11]。近年来,也有一些学者进行了热环境下飞行器动力学特性的试验研究。余艳辉等[12]研究了金属热防护结构在热载荷作用下的动力学特性;苏华昌等[13]提出了改进的热模态试验方法,利用振动台对试件施加猝发快扫形式的基础激励,并结合激光测振仪进行非接触式测量,最终获得舵面一阶频率随时间和温度的变化规律;杨凯等[14]设计了一套温度可控的实验设备,采用时频分析方法对时变结构进行了辨识;李宇峰等[15]研究了气动加热的模拟方法,获得了不同温度梯度条件下热防护壁板结构的振型、固有频率等模态信息。

传统的热模态分析采用频域方法,在某一短时间段内将结构视为时不变系统,并在此时间段内进行辨识,无法形成完整连续的辨识结果。针对此问题,本文总结了子空间跟踪辨识模态参数的一般步骤,利用一个时变两自由度系统模型的响应数据,通过添加不同量级噪声来对系统进行再辨识,考察了 3 种应用较为广泛的子空间跟踪算法和 1 种较新的基于新信息准则的子空间跟踪算法,并从中选出了抗噪能力最强的算法。最后,设计了飞行器舵面结构的加热试验,利用优选出的子空间跟踪算法对结构升温阶段的模态参数进行了辨识,得出了结构完整的连续时间固有频率变化规律。

1 方法过程简介

考虑离散时变状态方程

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k)\\ \boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k)\end{cases}\tag{1}$$

式中:系统矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times r}$,$\boldsymbol{C}\in\mathbf{R}^{m\times n}$。此处:"$\mathbf{R}$"为实数。$k+1$ 时刻的输入矩阵 $\boldsymbol{U}(k+1)$、输出矩阵 $\boldsymbol{Y}(k+1)$、输入数据 $\bar{\boldsymbol{u}}(k+1)$ 及输出数据 $\bar{\boldsymbol{y}}(k+1)$ 可写成 Hankel 矩阵形式,即

$$\begin{cases}\boldsymbol{U}(k+1)=[\boldsymbol{U}(k)\quad\bar{\boldsymbol{u}}(k+1)]\\ \boldsymbol{Y}(k+1)=[\boldsymbol{Y}(k)\quad\bar{\boldsymbol{y}}(k+1)]\end{cases}\tag{2}$$

$$\boldsymbol{U}(k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}(1)&\boldsymbol{u}(2)&\cdots&\boldsymbol{u}(k)\\ \boldsymbol{u}(2)&\boldsymbol{u}(3)&\cdots&\boldsymbol{u}(k+1)\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ \boldsymbol{u}(M)&\boldsymbol{u}(M+1)&\cdots&\boldsymbol{u}(k+M-1)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}(k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}(1)&\boldsymbol{y}(2)&\cdots&\boldsymbol{y}(k)\\ \boldsymbol{y}(2)&\boldsymbol{y}(3)&\cdots&\boldsymbol{y}(k+1)\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ \boldsymbol{y}(M)&\boldsymbol{y}(M+1)&\cdots&\boldsymbol{y}(k+M-1)\end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}(k+1)=[\boldsymbol{u}(k+1)\quad\boldsymbol{u}(k+2)\quad\cdots\quad\boldsymbol{u}(k+M)]^{\mathrm{T}}$$

$$\bar{\boldsymbol{y}}(k+1)=[\boldsymbol{y}(k+1)\quad\boldsymbol{y}(k+2)\quad\cdots\quad\boldsymbol{y}(k+M)]^{\mathrm{T}}$$

式中:k 为时刻;M 为选定的 Hankel 矩阵块行数。

由此得到状态量 $\boldsymbol{z}(k)$ 的更新方式为

$$\boldsymbol{z}(k)=\frac{[\boldsymbol{Y}(k-1)\boldsymbol{U}^{\dagger}(k-1)]\bar{\boldsymbol{u}}(k)-\bar{\boldsymbol{y}}(k)}{\sqrt{1+\alpha(k)}}\tag{3}$$

式中:上标"†"表示求对应矩阵的伪逆。且

$$\boldsymbol{w}(k)=[\boldsymbol{U}(k-1)\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(k-1)]^{-1}\bar{\boldsymbol{u}}(k)\tag{4}$$

$$\alpha(k)=\bar{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{w}(k)\tag{5}$$

式(3)、(4)中 $\boldsymbol{Y}(k)\boldsymbol{U}^{\dagger}(k)$ 和 $[\boldsymbol{U}(k)\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(k)]^{-1}$ 的更新方式为

$$[\boldsymbol{Y}(k)\boldsymbol{U}^{\dagger}(k)]=[\boldsymbol{Y}(k-1)\boldsymbol{U}^{\dagger}(k-1)]-\boldsymbol{z}(k)\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(k)\tag{6}$$

$$[\boldsymbol{U}(k)\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(k)]^{-1}=[\boldsymbol{U}(k-1)\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(k-1)]^{-1}-\boldsymbol{w}(k)\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(k)/\sqrt{1+\alpha(k)}\tag{7}$$

式(3)~(7)组成了状态量 $\boldsymbol{z}(k)$ 的更新规则。对任意 k 时刻的输入矩阵 $\boldsymbol{U}(k)$ 组建其对应的投影矩阵 $\boldsymbol{U}^{\perp}(k)$,使得 $\boldsymbol{U}(k)\boldsymbol{U}^{\perp}(k)=0$,则有

$$\boldsymbol{U}^{\perp}(k)=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{U}^{\dagger}(k)\boldsymbol{U}(k)=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(k)[\boldsymbol{U}(k)\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(k)]^{-1}\boldsymbol{U}(k)\tag{8}$$

且

$$\boldsymbol{Y}(k)\boldsymbol{U}^{\perp}(k)=\boldsymbol{Y}(k)-\boldsymbol{Y}(k)\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(k)(\boldsymbol{U}(k)\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(k))^{-1}\boldsymbol{U}(k)=\boldsymbol{\Gamma}(k)\boldsymbol{X}(k)\boldsymbol{U}^{\perp}(k)\tag{9}$$

对 $\boldsymbol{Y}(k)\boldsymbol{U}^{\perp}(k)$ 进行奇异值分解(SVD),可得

$$\boldsymbol{Y}(k)\boldsymbol{U}^{\perp}(k)=\boldsymbol{R}(k)\boldsymbol{\Sigma}(k)\boldsymbol{V}(k)^{\mathrm{T}}\tag{10}$$

式中:由 $\boldsymbol{R}(k)$ 的前 n 列组成的矩阵即为 k 时刻的广义能观矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}(k)$。

如果系统的激励为随机白噪声,则 $\boldsymbol{z}(k)=\bar{\boldsymbol{y}}(k)$。因此,在随机白噪声激励情况下,子空间跟踪方法转换为仅利用输出响应进行模态参数辨识的方法。子空间跟踪算法旨在替代式(10)中的 SVD。子空间跟踪问题可被视为一个无约束优化问题,并用递推最小二乘方法求解,最终达到节省计算量的

目的。例如 NIC 方法选择的目标函数为

$$J(\boldsymbol{W}(k)) = \frac{1}{2}\{\mathrm{tr}[\log(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{R}_{zz}(k)\boldsymbol{W}(k))] - \mathrm{tr}(\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{W}(k))\} \tag{11}$$

式中：$\boldsymbol{R}_{zz}(k) = \mathrm{E}[\boldsymbol{z}(k)\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(k)]$。此处："E"表示期望；"tr"表示矩阵的迹。子空间跟踪方法优化问题具体求解过程可参考文献[5-10]。

得到任一 k 时刻的信号子空间后，可通过式(12)估计离散系统矩阵，具体为

$$\hat{\boldsymbol{A}}(k) = [\boldsymbol{W}_1(k)]^{\dagger}[\boldsymbol{W}_2(k)] \tag{12}$$

式中：$\boldsymbol{W}_1(k)$ 和 $\boldsymbol{W}_2(k)$ 分别由 $\boldsymbol{W}(k)$ 的前$(M-1)\times m$ 和后$(M-1)\times m$ 行组成。对估得的离散系统矩阵进行特征值分解，可得

$$\hat{\boldsymbol{A}}(k) = \boldsymbol{\psi}(k)\boldsymbol{\Lambda}(k)\boldsymbol{\psi}^{-1}(k) \tag{13}$$

式中：$\boldsymbol{\Lambda}(k) = \mathrm{diag}(\lambda_1(\mathrm{k}),\lambda_2(\mathrm{k}),\cdots,\lambda_n(\mathrm{k}))$ 表示由共轭复特征值组成的对角阵；$\boldsymbol{\psi}(k)$ 为特征向量。k 时刻第 i 阶系统伪固有频率 $\omega_i(k)$ 和模态阻尼比 $\xi_i(k)$ 可通过式(14)、(15)求得，即

$$\omega_i(k) = \ln(|\lambda_i(k)|)/(2\Delta t\pi) \tag{14}$$

$$\xi_i(k) = -\ln(\lambda_i^{\mathrm{R}}(k))/(\Delta t\omega_i(k)) \tag{15}$$

式中：上标"R"表示实部；Δt 为数据采样周期。

综上所述，基于子空间跟踪的时变模态参数辨识方法的一般步骤可总结如下：

1)对激励和响应数据进行预处理，使数据满足递推步骤的需要，得到状态向量 $\boldsymbol{z}(k)$；

2)应用子空间跟踪算法，得到时变系统矩阵 $\hat{\boldsymbol{A}}(k)$；

3)利用复模态分析理论得出时变频率 $\omega_i(k)$、时变模态阻尼比 $\xi_i(k)$ 等模态参数；

4)重复步骤 1)～3)，直至所有响应数据被处理。

2　仿真计算

本节对一个有理论参考解的两自由度弹簧-质量系统进行辨识，系统简图如图 1 所示。

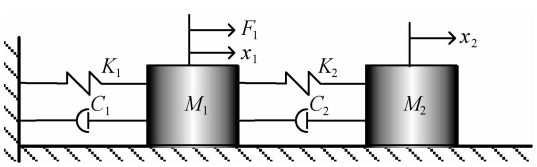


图 1　两自由度弹簧-质量模型示意图

Fig. 1　Schematic diagram of two degree-of-freedom spring-mass model

系统的运动控制方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{C}(t)\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{F}(t) \tag{16}$$

式中：$\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)]^{\mathrm{T}}$ 为系统位移；$\boldsymbol{F}(t) = [F_1(t) \quad 0]^{\mathrm{T}}$ 为系统所受外力；系统质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 取值为

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

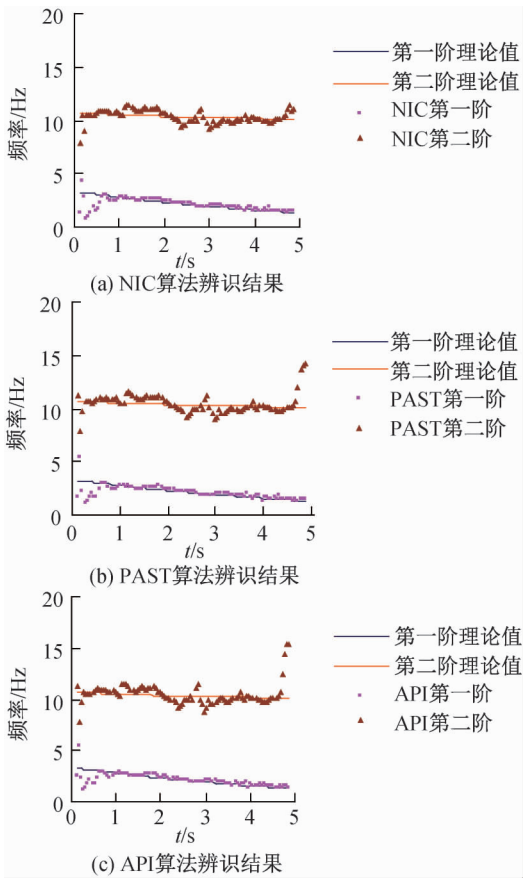
系统刚度矩阵 $\boldsymbol{K}(t)$ 取值为

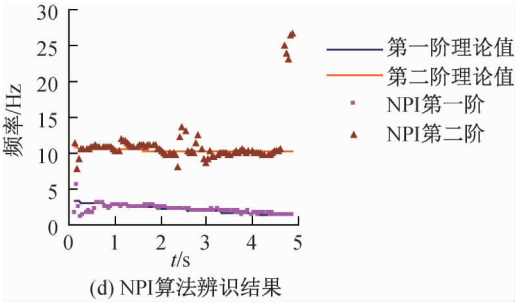
$$\boldsymbol{K}(t) = \begin{bmatrix} K_1(t) + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

系统阻尼矩阵 $\boldsymbol{C}(t)$ 为

$$\boldsymbol{C}(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) + C_2(t) & -C_2(t) \\ -C_2(t) & C_2(t) \end{bmatrix} = 0.5\boldsymbol{M} + 10^{-4}\boldsymbol{K}(t) \tag{19}$$

为模拟舵面受热时的刚度变化情况，令式(18)中刚度 $K_1(t)=1\,000\exp(-0.4t)$，$K_2=2\,000$，仿真计算的时间步长 $\Delta t=1$ ms，时长总计为 5 s。辨识方法采用文献[2-7]中所述方法。为模拟实测结构响应，在仿真响应数据中添加一定量的噪声，使最终的响应数据信噪比(SNR)为 10。各方法采用相同的计算参数，最终辨识结果如图 2 所示。





(d) NPI算法辨识结果

图 2 信噪比为 10 时各算法辨识结果

Fig. 2 Identification results with different algorithms when SNR equals to 10

图中：低于 5 Hz 的频率为第一阶固有频率；10 Hz 左右的频率为第二阶固有频率；实线部分为仿真模型的理论参考值；点线部分为各算法辨识值。从图中可以看出，各算法都能很好地辨识出两阶固有频率，且能对固有频率进行跟踪。其中：NPI 算法的第二阶辨识结果在某些时刻偏离理论参考值较远；API 算法和 PAST 算法的辨识结果非常接近；NIC 算法的辨识结果更为接近理论参考值，总体上看精度更高。

为对不同算法在不同量级噪声情况下的辨识结果进行量化评估，引入平均绝对误差率(MAPE)，其定义为

$$e_{\mathrm{MAPE}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{|f_i-\tilde{f}_i|}{f_i}\times 100\% \qquad (20)$$

式中：N 为结果总采样点数；f_i 为第 i 时刻的理论参考值；$\tilde{f}_i$ 为第 i 时刻的辨识结果。

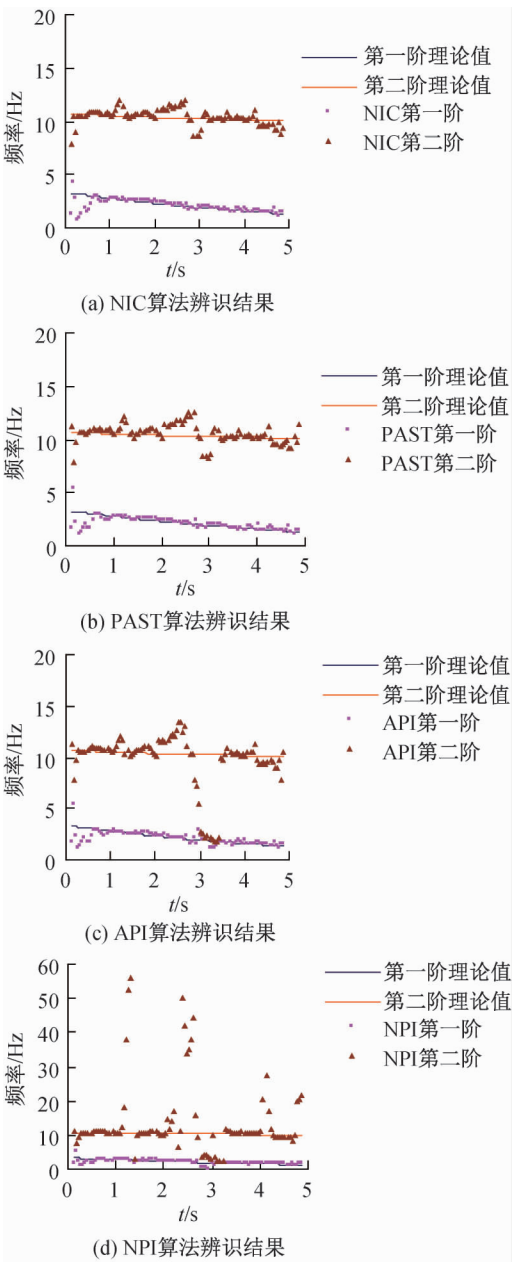
通过以上 4 种算法并利用信噪比分别为 25，15，5，2 时的响应数据进行辨识，最终得到的辨识结果 MAPE 值如表 1 所示。

表 1 不同算法辨识结果 MAPE 值比较

Tab. 1 MAPE comparison of identification results with different algorithms %

算法	阶次	SNR			
		25	15	5	2
NPI	1	11.4	11.8	14.7	23.0
	2	7.8	22.1	95.5	116.0
API	1	10.9	11.0	13.9	18.1
	2	4.3	5.5	52.4	65.2
PAST	1	14.6	15.7	17.1	18.1
	2	5.4	10.1	17.0	32.4
NIC	1	9.9	12.5	13.2	16.3
	2	3.5	5.2	9.3	13.7

从表 1 中可以看出：在响应信号质量较好时，各算法均能很好地辨识结果，各阶次相对理论参考值的误差较小；随着信噪比的降低，各算法辨识结果的误差随之增大，本例中，NPI 算法和 API 算法在信噪比为 5 时的第二阶辨识结果 MAPE 值超过了 50%，说明辨识结果已不可信。从辨识结果的精度来看，在诸多算法中，PAST 算法和 NIC 算法表现较好，在信号质量较差时也能对结构的固有频率做出估计。在信噪比为 5 时，各算法辨识结果如图 3 所示。



(a) NIC算法辨识结果

(b) PAST算法辨识结果

(c) API算法辨识结果

(d) NPI算法辨识结果

图 3 信噪比为 5 时各算法辨识结果

Fig. 3 Identification results with different algorithms when SNR equals to 5

由图可知：NPI 算法辨识结果的第二阶误差较大，在 2～3 s 时间段内失去了频率跟踪能力；从总体上看，相较于其他几种算法，NIC 算法的辨识结果更接近理论参考值，可认为 NIC 算法的抗噪声能力更强。

3　飞行器典型结构热模态辨识

飞行器中存在大量的梁、板类结构，如飞行器舵面。在飞行器飞行过程中，舵面结构所在的热力学环境也会随之变化，由此导致的结构动力学特性的变化一直是工业领域的关注热点。因此，本节对一个钛合金舵面结构进行辨识，该舵面结构的三维尺寸如图 4 所示。

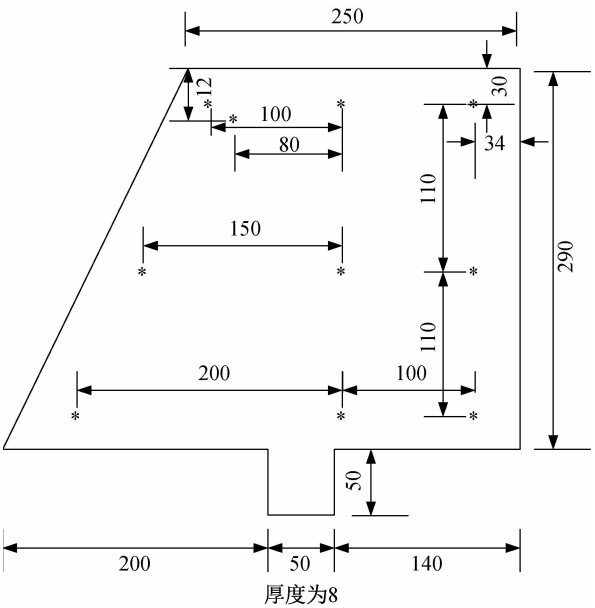


图 4　舵面结构尺寸以及传感器布置图(mm)

Fig. 4　Profile of rudder structure and sensor distribution(mm)

舵面结构为钛合金 TA15 材质，舵面根部突出部分用于夹持实验夹具。图中：“＊”号标记处为高温传感器布置点，其中，舵面左上方第二个位置处为激励点，其余为加速度响应测量点。

高温实验装置原理如图 5 所示。图中：(1)为与试验件相匹配的夹具；(2)为水冷组件；(3)为红外石英灯阵；(4)为试验件；(5)为高温加速度传感器；(6)为测温热电偶；(7)为激振杆；(8)为力传感器；(9)为激振器。数据采集系统集成了信号发生器的功能。激振器通过功率放大器与数据采集器相连，其余传感器通过电荷放大器与数据采集器相连。温控 PLC 内置了温控程序，结合测温热电偶按照设定好的温度曲线对石英灯阵进行功率控制，从而实现控制试验件温度的功能。

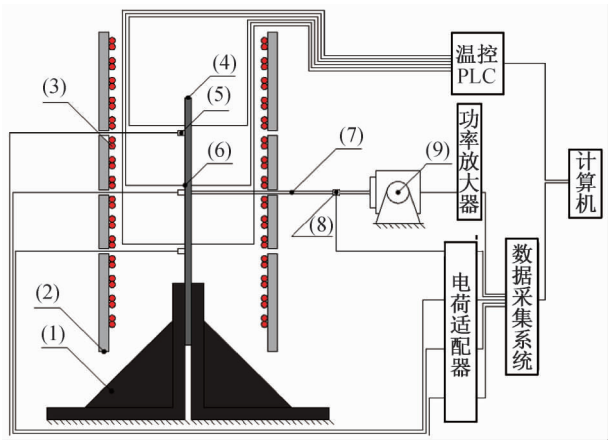


图 5　实验装置原理图

Fig. 5　Schematic diagram of experiment setup

实验过程中对试件施加均方根值为 1 N 的白噪声激励。未进行加热前首先采集 30 s 的结构振动响应数据；而后通过石英灯阵加热使舵面温度在 24 s内由常温升高至 500 ℃，此为快速升温阶段；当舵面温度达到 500 ℃后保持恒温状态 100 s；之后关闭加热系统，此为自然降温过程。试件温度变化曲线如图 6 所示。在以上加热、恒温和降温过程中，数据采集系统同时对舵面结构进行激励，并采集振动响应数据。

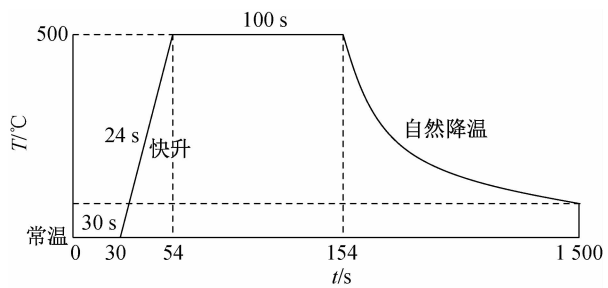


图 6　试件温度变化曲线

Fig. 6　Temperature curve of test structure

从上一节对仿真模型的辨识结果来看，NIC 算法的抗噪声能力更强，因此采用该算法对舵面结构进行辨识。由于结构表面温度迅速升至 500 ℃，而结构自身参数的变化要滞后于这样的快速变化，因而选取前 50 s 进行辨识。利用 NIC 算法辨识出的前四阶结果如图 7 所示。从图中可以看出，随着温度升高，各阶固有频率均出现了不同程度的下降。第一阶固有频率在初始时刻和跟踪结束时扰动较

大,这主要与本试验中低频加速度信号幅值较小有关;更高阶频率的辨识值相对稳定,能反映结构固有频率随温度变化情况。实验结果表明:NIC 算法可用于热模态分析,对加速度响应幅值较高的频段辨识效果较好;基于 NIC 子空间跟踪的模态参数辨识方法可用于有激励信号的情况,当激励信号为白噪声时,该方法可转换为仅利用响应数据进行辨识的运行模态分析方法。

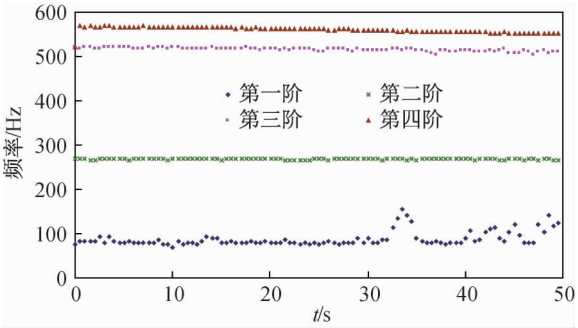


图 7 前四阶辨识结果

Fig. 7 Identification results of first four orders

4 结束语

本文总结了子空间算法的一般步骤,结合一个有理论参考解的时变两自由度弹簧-质量模型考察了 4 种子空间算法的辨识精度,结果发现 NIC 算法的抗噪能力较强。利用能够对飞行器舵面结构进行受控加热的实验装置采集了舵面结构在快速升温过程中的加速度响应数据,并仅利用响应数据进行了时变模态参数辨识。辨识结果表明:基于 NIC 子空间跟踪的模态参数辨识方法适用于热模态分析,对振动响应幅值较高的频段辨识效果较好,具有一定的工程应用价值。但受子空间类算法本身所限,模型定阶、计算参数选择等问题仍待解决。

参考文献

[1] 廖少英. 高超声速跳跃飞行武器研究[J]. 上海航天, 2005, 22(4): 27-30, 44.

[2] 雷延花, 徐敏, 陈士橹. 高超音速飞行器气动加热计算[J]. 上海航天, 2001, 18(5): 10-13.

[3] 刘川, 彭仁军, 郑科宇, 等. 挠性卫星模态参数辨识技术研究[J]. 上海航天, 2016, 33(2): 39-42.

[4] 吴洪波, 李晓冬. 气动加热参数辨识在型号设计中的应用[J]. 上海航天, 2003, 20(6): 24-27.

[5] 吴日强, 于开平, 邹经湘. 改进的子空间方法及其在时变结构参数辨识中的应用[J]. 工程力学, 2002, 19(4): 67-70, 89.

[6] 庞世伟, 于开平, 邹经湘. 用于时变结构模态参数识别的投影估计递推子空间方法[J]. 工程力学, 2005, 22(5): 115-119.

[7] 庞世伟, 于开平, 邹经湘. 用于时变系统辨识的自由响应递推子空间方法[J]. 振动工程学报, 2005, 18(2): 233-237.

[8] 杨凯, 于开平, 刘荣贺, 等. 两种新的基于子空间跟踪的时变模态参数快速辨识算法[J]. 工程力学, 2012, 29(10): 294-300.

[9] 倪智宇, 谭述君, 吴志刚. 改进的 TW-API 方法及其在时变模态参数辨识中的应用[J]. 振动工程学报, 2015, 28(5): 721-729.

[10] 倪智宇, 邬树楠, 吴志刚, 等. 利用改进 TW-API 方法在轨辨识挠性航天器时变模态参数[J]. 宇航学报, 2015, 36(7): 769-776.

[11] MIAO Y, HUA Y. Fast subspace tracking and neural network learning by a novel information criterion [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(7): 1967-1979.

[12] 余艳辉, 李书, 王远达. 热环境下的金属热防护系统的动力学特性研究[J]. 振动、测试与诊断, 2013, 33(增刊 1):171-175, 229.

[13] 苏华昌, 骞永博, 李增文, 等. 舵面热模态试验技术研究[J]. 强度与环境, 2011, 38(5): 18-24.

[14] 杨凯, 于开平, 白云鹤. 基于信号时频分析理论识别时变模态参数实验[J]. 振动、测试与诊断, 2015, 35(5): 880-884, 991.

[15] 李宇峰, 贺利乐, 张璇, 等. 典型热防护壁板结构的热模态分析[J]. 应用力学学报, 2017, 34(1): 43-49.

(本文编辑:李栋勉)