基于脉冲初值的小推力转移轨道优化研究

王旭生^{1,2},施伟璜^{1,2},王 伟^{1,2},彭玉明^{1,2}

(1.上海卫星工程研究所,上海 201109; 2.上海市深空探测技术重点实验室,上海 201109)

摘 要:针对小推力转移轨道优化过程往往忽略初值多样性的现状,研究了基于不同脉冲初值的小推力转移 轨道优化问题。基于直接法的离散思想建立了小推力转移轨道优化模型,提出了基于粒子群和序列二次规划的组 合优化算法,以地球1:1 共振近地小行星2016HO3 交会任务为例,将3 种典型的脉冲轨道作为初值设计了燃料 最优小推力转移轨道。仿真结果表明:3 种初值轨道优化得到了2 个小推力转移发射窗口,两者燃料消耗差距不超 过6%。不同的初值对小推力轨道的整体性能指标影响较小,但开关机时刻和推力方向的变化会产生较大差异,从 而得到不同的最优控制曲线。

关键词:小行星探测;小推力轨道优化;燃料最优;脉冲初值;粒子群优化;序列二次规划算法
 中图分类号:V 412.4 文献标志码:A
 DOI:10.19328/j.cnki.1006-1630.2019.01.009

Study on Low-Thrust Transfer Trajectory Optimization Based on Impulse Initial Value

WANG Xusheng^{1,2}, SHI Weihuang^{1,2}, WANG Wei^{1,2}, PENG Yuming^{1,2}

(1.Shanghai Institute of Satellite Engineering, Shanghai 201109, China;

2.Shanghai Key Laboratory of Deep Space Exploration Technology, Shanghai 201109, China)

Abstract: Considering the fact that the diversity of initial values is often neglected in the optimization process of the low-thrust transfer trajectory, the low-thrust transfer trajectory optimization with different initial impulse values is studied in this paper. Firstly, a low-thrust transfer trajectory optimization model based on the direct method is established. Then, a combinatorial optimization algorithm based on particle swarm optimization and sequential quadratic programming is proposed. Finally, the asteroid 2016HO3 rendezvous mission is selected as a simulation example, and the optimization results of the low-thrust transfer orbit are analyzed with single-revolution double-pulse, triple-pulse and multi-revolution double-pulse as initial values. The results show that two launch windows are obtained from three initial values, with the fuel consumption gap of less than 6%. Different initial value inputs will cause large differences in switch time and the change of thrust direction, but only a subtle distinction in overall performance indexes, thus different optimal control curves can be obtained.

Keywords: asteroid exploration; low-thrust trajectory optimization; fuel-optimal; impulse initial value; particle swarm optimization; sequential quadratic programming

0 引言

深空探测是当今世界航天活动的热点研究领域,是一个国家综合国力和创新能力的体现。我国 已将深空探测纳入国家重大科技专项,正在实施首 次自主火星探测任务,并规划了多目标小行星探测、 火星取样返回、木星系及行星穿越等任务。其中,小 行星探测任务的总速度增量要求大于8 km/s,由于 传统低比冲的化学推进系统无法使用,因此小推力、 高比冲、高可靠的电推进系统成为工程实施的优选 动力形式。

收稿日期:2018-07-06;修回日期:2018-12-03

基金项目:上海市科委科研计划项目(16DZ1120300)

作者简介:王旭生(1994—),男,硕士研究生,主要研究方向为深空探测轨道设计与优化、制导与控制等。

在小推力作用下,深空探测器的轨道优化在本 质上是一个最优控制问题。目前求解方法主要有直 接法、间接法和混合法^[1],它们都不可避免地需要进 行初值猜测。初值猜测不仅在理论上作为算法的启 动值必不可少,而且在工程应用上也是粗略优化的 过程,可提供任务可行性、性能指标、各阶段大致时 间节点等关键信息,为进一步优化轨道提供参考。 脉冲轨道作为小推力转移轨道的初值,具有形式简 单、计算方便的优点,被广泛应用于小推力转移轨道 优化的求解,如:美国喷气推进实验室(JPL)基于圆 锥曲线拼接法开发了 MALTO 软件包的初值,采用 一系列脉冲替代小推力轨道[2],该方法已应用于木 星冰卫星轨道器任务的轨道设计中[3]:陈扬等[4]基 于脉冲估算结果设计了电推进轨道,采用间接法求 解燃料最优控制问题,得到了小推力的最优轨迹;李 九天[5]提出了基于小推力可实现性的脉冲轨道约 束,研究了基于该约束的燃料最优脉冲转移轨道设 计方法:蒋小勇等[6]提出了一种基于多冲量能耗估 算的任务窗口搜索方法,可用于搜索小推力任务的 发射窗口。以上研究均基于单一形式的脉冲初值, 在工程应用中未考虑脉冲轨道的多样性,缺少对不 同形式的脉冲初值与小推力优化结果之间影响关系 的分析。

本文基于小行星探测任务,以燃料最优为性能 指标,提出了一种采取粒子群优化(PSO)和序列二 次规划(SQP)的组合优化算法,可适应于不同形式 的脉冲初值输入,并保证收敛性;设计了地球1:1 共振近地小行星2016HO3 交会任务的小推力转移 轨道,给出了轨道设计参数;对比分析了可用于小推 力转移轨道优化初值结果的3种典型脉冲轨道,讨 论了不同脉冲初值对小推力转移轨道优化结果的 影响。

1 小推力转移轨道优化问题

在日心黄道惯性坐标系下,探测器典型的二体 动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v} \\ \dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{\mu}{r^3} \boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{U}}{m} + f \\ \dot{\boldsymbol{m}} = -\frac{\|\boldsymbol{U}\|}{I_{\text{sp}} g_0} \end{cases}$$
(1)

式中:r,v 为探测器的位置矢量和速度矢量;U 为发 动机的推力矢量, $U = [F_x \quad F_y \quad F_z];m$ 为探测器 的瞬时质量; I_{sp} 为发动机比冲;f为除发动机推 力加速度之外的摄动加速度; g_0 为海平面重力加 速度。r,v,m为状态变量,X = [r v m]。将 式(1)简写为

 $\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t), \ t_0 \leqslant t \leqslant t_f \qquad (2)$

将小推力轨道优化问题转换为寻找最优控制函数 U(t),并使性能指标

$$J = J(t_f, \boldsymbol{X}_f) \tag{3}$$

达到最小,同时满足动力学方程约束条件、初末状态 约束条件、路径约束条件,即

$$\dot{\boldsymbol{X}} = f(t, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}), \ t \in [t_0, t_f]$$
(4)

$$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}_0, \ \boldsymbol{X}(t_f) = \boldsymbol{X}_f \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{U}(t)) \leqslant 0 \tag{6}$$

2 优化数学模型

小推力轨道优化问题的最优控制描述形式会引 入无明显物理意义的协态变量,导致收敛域窄,造成 初值猜测困难^[7]。本文基于直接法的离散思想,建 立非线性规划(NLP)形式的小推力转移轨道优化数 学模型。以离散节点的中点作为强制匹配点,将微 分方程约束转化为残差形式的等式约束。

将整个飞行时间分为 N 个时间段,各节点处的 时刻为

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots < t_{N-1} < t_N = t_f$$
(7)

假设节点 t_i 上的状态变量和控制变量分别为 $X_i, U_i,$ 则由式(2)可得 \dot{X}_i 。令

$$S = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}, \ t \in [t_i, t_{i+1}]$$
(8)

则 $S \in [0,1]$ 。对状态变量进行三阶 Hermite 插值, 控制变量采用线性插值。以 x 代表状态变量的任 一分量,则

$$x = C_0 + C_1 S + C_2 S^2 + C_3 S^3 \tag{9}$$

$$\dot{x} = C_1 + 2C_2S + 3C_3S^2 \tag{10}$$

式(9),(10)满足 $x(0) = x_i, x(1) = x_{i+1}, x(0) = x_i,$ $\dot{x}(1) = \dot{x}_{i+1}, 易求得$

$$\begin{cases} C_{0} = x(0) \\ C_{1} = \dot{x}(0) \\ C_{2} = -3x(0) - 2\dot{x}(0) + 3x(1) - \dot{x}(1) \\ C_{3} = 2x(0) + \dot{x}(0) - 2x(1) + \dot{x}(1) \end{cases}$$
(11)

以节点间的中点作为强制匹配点,将连续的动力学 微分方程约束转化为离散的等式约束^[8]。将 S =

0.5代人式(9),(10),分别得到 x_{0.5}和 x_{0.5}。将 x_{0.5}代人式(2),使

$$\Delta f = f(x_{0.5}) - \dot{x}_{0.5} = 0 \tag{12}$$

对于状态变量中任一分量均可执行上述操作。 至此,连续的动力学方程约束转化为离散的 7N 个 等式约束。

在离散形式下,初始状态与终端状态分别与出 发天体和到达天体的位置速度相同,即

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}_{\text{DepartPlanet}}(t_0), \ \boldsymbol{r}(t_f) = \boldsymbol{r}_{\text{ArrivePlanet}}(t_f) \\ \boldsymbol{v}(t_0) = \boldsymbol{v}_{\text{DepartPlanet}}(t_0), \ \boldsymbol{v}(t_f) = \boldsymbol{v}_{\text{ArrivePlanet}}(t_f) \end{cases}$$
(13)

给定出发时间和到达时间,通过查找星历获取 出发、到达天体的位置速度。末端质量自由,初始质 量为发射质量,假设发射质量为 m₀,则

$$m(t_0) = m_0 \tag{14}$$

离散形式的路径约束为各节点处的推力值小于 等于最大推力值 F_{max},即

$$\| \boldsymbol{U}(t_i) \| \leqslant F_{\max} \tag{15}$$

以燃料最优为指标,将离散形式表示为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \| \dot{m} \| \mathrm{d}t = m_0 - m_f$$
(16)

至此,小推力转移轨道问题优化的数学模型完成建立。寻优变量 $Z = \{t_0, t_f, X_0, \dots, X_N, U_0, \dots, U_N\}$,优化指标为式(16),约束条件为式(12)~(15)。其中,约束条件和性能指标可根据具体情况进行相应修改。

3 基于 PSO 和 SQP 的组合优化算法

3.1 PSO 算法搜索脉冲初值

传统 PSO 算法具有全局优化和并行计算的能力,相比于经典的基于梯度的优化算法具有更好的 全局收敛性^[9],但 PSO 算法出现早熟现象的概率较 大,以致收敛于局部最优解。为此,本文通过线性减 小惯性权重系数和局部学习因子,增大全局学习因 子,使算法在初期具备较强探索能力,在后期又有较 好的收敛性,使其在最优解附近精细搜索。本文算 法主要包括以下步骤。

初始化粒子群位置 p 和速度 v,粒子位置信
 息包含脉冲作用时刻和脉冲作用矢量。

2) 对每个粒子用构造的位置函数 Fitness 进行 评价,此时 Fitness 为总速度增量。

3) 更新每个粒子的历史最优位置 pb 和群体的

全局最优位置 gb。

4)分别按照式(17),(18)更新每个粒子的速度和位置,其表达式为

$$v_{i+1} = w \cdot v_i + c_1 \cdot \text{rand}() \cdot (p_b - p) + c_2 \cdot \text{rand}() \cdot (g_b - p_b)$$
(17)

$$p_{i+1} = p_i + v_{i+1}$$
(18)

式中:w 为粒子的惯性权重系数; c_1 为局部学习因子; c_2 为全局学习因子;rand()表示 0~1 的随机数。同时设置粒子学习速度在[$-v_{max}, v_{max}$]内,若更新后的速度超出边界,则取相应的边界值。 w, c_1, c_2 的更新依据为

$$w = w_{\max} - \frac{c}{c_{\max}} (w_{\max} - w_{\min})$$
(19)

$$c_1 = -(c_{1\max} - c_{1\min}) \frac{c}{c_{\max}} + c_{1\max}$$
 (20)

$$c_2 = (c_{2\max} - c_{2\min}) \frac{c}{c_{\max}} + c_{2\min}$$
 (21)

式中:c为运行代数;cmax为最大运行代数。

5) 判断终止循环条件。若条件不满足,则循环 执行步骤 2~4;若满足,则输出结果,生成初值 $Z_0 = \{t_0, t_f, X_0, \dots, X_N, U_0, \dots, U_N\}_0$ 。其中, $\{t_0, t_f\}$ 和 $\{X_0, X_1, \dots, X_N\}$ 中的位置和速度分量可直接从结 果中生成,质量可基于其消耗特性按等差递减生成; $\{U_0, U_1, \dots, U_N\}_0$ 可在[0, F_{max}]内随机猜测。为避 免随机性对结果带来的影响, $U_{i0} = F_{max}$ [0.5, 0.5, 0.5]。算法相关参数设置见表 1。

表1 粒子群算法参数

Tab. 1 Parameters of PSO algorithm

参数	数值
粒子个数 n/个	40
迭代次数 c max/次	2 000
惯性权重上限 w _{max}	0.9
惯性权重下限 w _{min}	0.4
运行次数/次	10
局部学习因子上限 clmax	2.5
局部学习因子下限 clmin	0.5
全局学习因子上限 c2max	2.5
全局学习因子下限 c2min	0.5
最大学习速度 vmax	0.8

3.2 SQP 算法求解 NLP 问题

SQP 算法是求解 NLP 问题的有效算法^[10],但 SQP 算法是基于可行方向搜索的一种约束优化方 法,其只具有局部优化能力,因此将 SQP 与 PSO 算 法结合可充分发挥两者优势。算法的主要步骤 如下。

1) 给定 PSO 算法搜索后生成的初值 Z₀,选定 正定矩阵 H₀。

2) 求解的二次规划问题为

$$\min \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}} \nabla \operatorname{obj}(\boldsymbol{Z}_{k}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H}_{k} \boldsymbol{d}$$

s.t. $\operatorname{con}(\mathbf{Z}_k) + \mathbf{d}^{\mathsf{T}} \nabla \operatorname{con}(\mathbf{Z}_k) \leq 0$ (22) 式中:obj为目标函数; con为约束; \mathbf{d}_k 为搜索方向, 当 $\|\mathbf{d}_k\| < 10^{-6}$ 时, 迭代结束。

3) 更新 $Z_{k+1} = Z_k + \alpha_k d_k$,其中 α_k 由线性搜索 确定。

4) 修正 H_k ,使 H_{k+1} 保持正定。

5) 判断是否满足迭代终止条件:若迭代次数超 过 2 000 次或 || *d*_k || <10⁻⁶,则迭代结束;否则重复 步骤 2~4。

为便于计算,初值生成过程和优化求解过程的 寻优变量均进行归一化处理。组合优化算法的流程 如图1所示。



Fig. 1 Combinatorial optimization algorithm flow

4 近地小行星 2016 HO3 交会任务

2016HO3 是 2016 年发现的 1 颗阿波罗型地球 1:1共振近地小行星,其日心轨道周期与地球公转周 期呈现 1:1的关系。虽然 2016HO3 为绕日小行星, 但是其相对地球的轨道较稳定,因此被称为地球的 第 2 个月亮。该小行星具有独特的探测价值,是我 国小行星探测任务的首要备选目标,其轨道参数见 表 2。表中:AU 为天文单位;MJD 为约化儒略日。

分析不同初值对优化结果的影响。假设探测器的发射质量为1500 kg,发射日期在2022年1月1

表 2 2016HO3 小行星轨道参数(MJD=58 000.0)

Tab. 2 Orbit parameters of 2016HO3(MJD=58 000.0)

参数	值
半长轴/AU	1.001 38
偏心率	0.103 97
轨道倾角/(°)	7.774 00
平近点角/(°)	331.488 00
升交点黄经/(°)	306.933 60
近日点幅角/(°)	66.406 50

日至 2024 年 1 月 1 日之间,飞行时间小于 700 d。 发射 C3(离开地球引力影响球时与地球相对速度 的平方)不大于 20 km²/s²,2016HO3 交会任务的 发射 C3 等高线如图 2 所示,发射时间从 2022 年 1 月 1 日开始。由图可见:若仅从发射 C3 的角度考 虑,则每年有 4 个发射窗口,平均每季度出现 1 次 波谷,分为长转移和短转移,两者交替出现。其 中,长转移时间约为 380~550 d,短转移时间约为 50~200 d。



假设小推力大小为 120 mN,发动机比冲为 3 500 s,推力大小和方向可调。选取单圈双脉冲、 三脉冲、多圈双脉冲 3 种典型的脉冲初值轨道。将 转移轨道等时间间隔离散为 150 个轨道段,经 PSO 算法搜索后的初值轨道参数及经 SQP 算法优化后 的小推力轨道参数见表 3,由表可得:

1)3种初值轨道优化后得到了2022年11月
 29日和2022年5月28日这2个发射窗口,其中三脉冲初值和多圈双脉冲的初值总速度增量差距最大,但优化结果最为接近。

2) 优化轨道和初值轨道的发射时间与飞行时

Tab. 3 Optimization results of 2016HO3 rendezvous mission orbit 初值轨道参数 优化轨道参数 初值轨道形式 发射时间 飞行时间/d 总速度增量/(km•s⁻¹) 发射时间 飞行时间/d 总燃料消耗量/kg 单圈双脉冲 2022-11-29 193 1.983 2 2022-11-29 362 36.808 1 三脉冲 2022-05-29 321 0.903.8 2022-05-28 391 34.905.2 多圈双脉冲 2022-05-27 426 2.189 7 2022-05-28 412 34.827 3

表 3 2016HO3 小行星交会任务轨道优化结果

间具有强耦合关系,提供的初值飞行时间越长,优化 得到的结果飞行时间也越长。SQP 算法只是局部 优化,因此优化轨道与初值轨道的飞行时间非常 接近。

3)3种形式的脉冲转移轨道总速度增量差距 最大达58%,而3种小推力转移方案燃料消耗差距 不超过6%。由此可见,本文算法对初值的敏感度 小,具有一定的全局优化能力。

各初值对应的小推力转移轨道的控制曲线如图 3 所示。图中,推力方向以黄经、黄纬表示。



图 3 不同初值的最优控制

Fig. 3 Optimal control curves of different initial values

由图3可见:

1) 小推力发动机基本符合满推或关机的形式, 即为 Bang-Bang 控制的小推力轨道最优控制形 式^[11]。 2)最优小推力转移轨道总体上存在2个主推进段,不同的脉冲轨道初值对应的最优控制曲线的差异主要体现在推力器开关机时刻的不同上。

3) 对于不同初值对应的优化结果,其推力方向 的变化在相位上有明显差别,可看出2个发射窗口 对应2种推力变化形式。

4) 从飞行时间来看,多圈双脉冲初值优化得到的小推力转移方案在第2个推进段关机后有约10d的自由飞行段。由此可见,三脉冲初值具有更优的性能。

单圈双脉冲初值和三脉冲初值对应的小推力转移轨道根数变化过程如图 4 所示。由图可见:对应于日期为 2022 年 11 月 29 日的发射窗口,发动机的工作序列为"先长后短";对应于日期为 2022 年 5 月



28日的发射窗口,发动机的工作序列为"先短后长"。 11月的发射窗口与5月的发射窗口相比,当探测器 从地球出发时,前者为小偏心率大轨道倾角,后者为 大偏心率小轨道倾角。从半长轴变化趋势来看,前者 为先减小后增大,后者为先增大后减小。

5 结束语

为解决小推力轨道优化未考虑脉冲初值多样性 的问题,利用不同形式的脉冲轨道初值对小推力转 移轨道优化结果的影响进行了研究,提出了能适应 不同脉冲初值的组合优化算法,以我国深空探测规 划背景任务中的小行星探测任务为例进行了仿真分 析。针对近地小行星 2016HO3 交会任务,以 3 种 典型的脉冲轨道优化得到了3种具体的小推力转移 轨道方案和2个发射窗口。其中,三脉冲轨道初值 与多圈双脉冲轨道初值对应的优化结果主要体现在 开关机时刻的不同,单圈双脉冲初值与三脉冲初值、 多圈双脉冲初值的优化结果主要体现在推力方向变 化的差异,3种初值轨道对应最优小推力轨道燃料 消耗量差距不超过 6%。研究结果表明:本文算法 对初值的敏感度低,能收敛于 Bang-Bang 最优控制 形式;不同初值对小推力轨道的整体性能指标影响较 小,但开关机时刻和推力方向的变化会产生较大差 异,从而得到不同的最优控制曲线。该研究成果对小 推力轨道优化初值的选取、我国未来小行星探测任务 的工程实施具有一定的参考价值。由于本文未对 2 个窗口的控制策略进行优劣性分析,且优化模型仅以 燃料消耗作为评价指标,未考虑轨道设计中飞行时 间、控制误差、多体模型等其他重要参考因素,因此后 续将综合考虑多种评价指标,进一步优化设计。

参考文献

[1] 朱政帆, 高扬. 空间小推力最优 Bang-Bang 控制的两

类延拓解法综述[J]. 深空探测学报, 2017, 4(2): 101-110.

- [2] FOGEL J, KOBLICK D, SHAH N. Survey of lowthrust gravity assist trajectory optimization methods, with comparisons to a novel, multi-impulse discretization approach[C]//International Astronautical Congress. 2015:168-171.
- [3] KOWALKOWSKI T D, KANGAS J A, PARCHER D W. Jupiter icy moons orbiter interplanetary injection period analysis [C]//AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting. 2006.131-135.
- [4] 陈杨,宝音贺西,李俊峰.我国小行星探测目标分析 与电推进轨道设计[J].中国科学:物理学力学天文 学,2011,41(9):1104-1111.
- [5] 李九天.多任务深空探测轨道设计优化方法研究[D]. 长沙:国防科学技术大学,2013.
- [6] 蒋小勇,张洪波,汤国建.基于多冲量能耗估算的小 推力任务窗口搜索[J].中国空间科学技术,2014,34
 (4):1-7.
- [7] 李俊峰,蒋方华.连续小推力航天器的深空探测轨道 优化方法综述[J].力学与实践,2011,33(3):1-6.
- [8] HARGRAVES C R, PARIS S W. Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1987, 10(4):338-342.
- [9] 周誌元,谭天乐.小行星探测器轨迹优化方法[J].上 海航天,2014,31(2):57-64.
- [10] GILL P E, MURRAY W, SAUNDERS M A. SNOPT: an SQP algorithm for large-scale constrained optimization[J]. Siam Review, 2005, 47(1):99-131.
- [11] JIANG F, BAO Y H, LI J. Practical techniques for low-thrust trajectory optimization with homotopic approach[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2012, 35(1):245-258.

(本文编辑:应振华)