

基于 CW 方程的航天器追逃问题半直接求解方法

孙松涛, 祝强军, 宋 斌

(上海宇航系统工程研究所, 上海 201109)

摘 要: 针对时间固定的两航天器追逃问题, 提出一种以半直接配点法研究追逃双方最优控制策略的求解方法。航天器追逃问题是基于微分对策的追逃问题, 该问题是含有追逐者和逃逸者控制变量的两点边值问题。若采用必要条件求解, 则对迭代初值要求高, 收敛困难。在两航天器均为连续小推力的假设条件下, 以终端距离为支付函数, 给出半直接配点法的求解过程。在此数值方法中, 根据半直接转换将微分对策问题转化为最优控制问题, 采用 Gauss-Lobatto 配点法将此最优问题最终转化为非线性规划问题, 继而通过序列二次规划算法求解。这种半直接配点法避免了对微分对策问题最优策略的必要条件(两点边值问题)求解。采用该方法求解对迭代初值不敏感, 且数值稳定性好。数值仿真实例验证了这种求解方法的可行性。该方法提高了求解两点边值问题的收敛性, 为求解含有双方控制变量的微分对策问题提供了一种思路。

关键词: 航天器追逃问题; 微分对策; 最优控制; 两点边值问题; 半直接配点法; 非线性规划

中图分类号: V 11 **文献标志码:** A

DOI: 10.19328/j.cnki.1006-1630.2019.03.010

Semi-Direct Collocation Method to Spacecraft Pursuit-Evasion Problem Based on CW Equations

SUN Songtao, ZHU Qiangjun, SONG Bin

(Shanghai Institute of Aerospace System Engineering, Shanghai 201109, China)

Abstract: In view of the spacecraft pursuit-evasion problem in the fixed time, the semi-direct collocation (SDC) method is adopted to investigate the strategies for the pursuing and evading spacecraft. The spacecraft pursuit-evasion problem is a differential game of pursuit and evasion, and is a two-point boundary-value problem with respect to pursuer's control variables and evader's control variables. The solution of the problem is difficult to be given via the necessary conditions of the differential game. Based on the assumption of the continuous low thrust, the terminal distance is the payoff function, and the solution of the problem is obtained by SDC. In SDC, the differential game is transformed to an optimal control problem, the optimal control problem is equal to the nonlinear mathematical programming via Gauss-Lobatto collocation method, and it is solved by the sequential quadratic programming method. SDC is insensitive to the iterative initial value, and its numerical stability is good. The optimal control strategies for both sides and trajectories are shown by the simulation. The proposed method is more convergent than that on account of the necessary conditions, and is provided as a new path to solve the pursuit-evasion problem.

Keywords: spacecraft pursuit-evasion problem; differential game; optimal control; two-point boundary-value problem; semi-direct collocation method; nonlinear mathematical programming

0 引言

两航天器追逃问题是一个双方对抗的控制策略问题。因航天器的动力学模型复杂, 且双方的对策

目标相反, 故此追逃问题的求解十分困难。在航天器追逃过程中, 追逐航天器期望选择使支付函数最小的控制策略, 而逃逸航天器则期望选择使支付函

数最大的控制策略,此追逃过程可由微分对策表述。微分对策最早由 ISAACS^[1] 提出。随着研究的深入,BERKOVITZ 等^[2-3] 给出了微分对策鞍点存在定理和最优控制策略存在的必要条件的严格推导。

虽然已知最优策略的必要条件,但针对此必要条件进行求解难度较大。此必要条件对应一个两点边值问题,该问题一般没有解析解,只能运用数值算法,而数值算法各有优缺点。目前,已有的数值方法包括配点法^[4] 和多重打靶法^[5]。配点法将微分方程在配点处近似成代数方程,从而求解满足两点边值约束和代数方程约束的变量,进而求解两点边值问题。这种方法虽然收敛性好,但计算结果精度不高,计算过程中运算量大,且初值需要选择。多重打靶法通过数值积分公式在众多子区间上将一个微分方程离散成代数方程,在任意子区间上求解一个初值问题,通过不断优化每个区间上的初始值,最终满足两点边值条件。与配点法相比,多重打靶法计算速度快,计算精度较高,但对初值非常敏感,因此收敛性差。航天器追逃问题多对应复杂的动力学模型。由配点法和多重打靶法的表述可知,这 2 种方法的收敛性都与初值选择有关,配点法虽对边值问题收敛性较强,但因航天器追逃模型为较复杂的非线性模型,若随机给出初值问题,则仍然不收敛。

本文为求解航天器追逃问题提供了一种新思路。采用半直接配点法求解此问题,避免了对两点边值问题的求解。研究思路来源于 HORIE 等^[6-7] 对导弹拦截问题的研究。该方法通过变换将微分对策问题转化成最优控制问题。将最优控制问题构造成一个非线性规划问题后,可运用序列二次规划(SQP)算法进行求解。但 HORIE 等提出的方法并不能说明半直接配点法求解微分对策问题与原问题的等价性。本文在文献[8]中证明了半直接配点法求解微分对策问题的等价性,为半直接配点法求解微分对策问题提供了理论依据。在求解两航天器追逃问题的过程中,通过半直接变化将微分对策问题转化成最优控制问题,采用 Gauss-Lobatto 配点法对此问题进行数值求解,可提高数值方法的收敛性和稳定性。

本研究在地点为近地轨道附近,对抗双方均为连续小推力,对策时间较短,且瞬时状态信息完全已知的假设条件下,针对时间固定的追逃问题,以距离为支付建立对策模型,给出半直接配点法求解此追逃问题的数值方法。最终给出追逃双方在对策条件

下的最优策略和仿真算例,为航天器追逃问题提供了一种有效的求解方法。

1 航天器追逃问题

针对两航天器轨道追逃问题,建立动力学方程,以描述追逐航天器 P 与逃逸航天器 E 在追逃过程中的运动规律,即

$$\begin{cases} \ddot{x}_i(t) = 2 \frac{\mu}{r^3(t)} x_i(t) + 2\omega(t) \dot{y}_i(t) + \\ \quad \dot{\omega}(t) y_i(t) + \omega^2(t) x_i(t) + T_i u_i^x \\ \ddot{y}_i(t) = -\frac{\mu}{r^3(t)} y_i(t) - 2\omega(t) \dot{x}_i(t) - \\ \quad \dot{\omega}(t) x_i(t) + \omega^2(t) y_i(t) + T_i u_i^y \\ \ddot{z}_i(t) = -\omega^2(t) z_i(t) + T_i u_i^z \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x_i(t)$, $y_i(t)$ 和 $z_i(t)$ ($i = P, E$) 分别为两追逃航天器在参考坐标系 $\hat{X}$, $\hat{Y}$ 和 $\hat{Z}$ 方向($\hat{Z}$ 轴与 $\hat{X}$, $\hat{Y}$ 轴符合右手定则)对应的分量; t 为时间; $\dot{x}_i(t)$, $\dot{y}_i(t)$ 和 $\dot{z}_i(t)$ 为坐标分量对时间 t 的一阶导数; $\ddot{x}_i(t)$, $\ddot{y}_i(t)$ 和 $\ddot{z}_i(t)$ 为坐标分量关于时间 t 的二阶导数; u_i^x , u_i^y 和 u_i^z 分别为两追逃航天器在 3 个坐标分量上施加的控制; $r(t)$ 为原点 O 至地心的瞬时地心距; μ 为地球引力常数; $\omega(t)$ 为 O 点绕地球飞行的角速度; T_P 和 T_E 分别为两航天器的最大单位质量加速度。

两航天器的位置关系如图 1 所示。

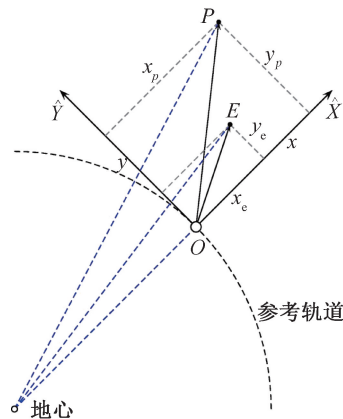


图 1 两航天器对策的坐标示意图

Fig.1 Coordinate schematic diagram of pursuer and evader

在式(1)中,追逐航天器 P 和逃逸航天器 E 的控制量满足约束条件

$$\| [u_i^x \quad u_i^y \quad u_i^z]^T \|_2 \leq 1$$

式中: $\|\cdot\|_2$ 为欧氏范数。

此航天器追逃问题的支付函数为

$$J(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_E \quad \mathbf{y}_P - \mathbf{y}_E \quad \mathbf{z}_P - \mathbf{z}_E\|_{t=t_f}^T\|_2^2$$

式中:

$$\mathbf{u}_P = [u_P^x \quad u_P^y \quad u_P^z]^T$$

$$\mathbf{u}_E = [u_E^x \quad u_E^y \quad u_E^z]^T$$

为最大和最小化终端距离 J , 需在固定的区间 $[t_0, t_f]$ 上寻找鞍点 $(\mathbf{u}_P^*, \mathbf{u}_E^*)$, 即

$$J(\mathbf{u}_P^*, \mathbf{u}_E^*) = \min_{\mathbf{u}_P} \max_{\mathbf{u}_E} \frac{1}{2} \cdot$$

$$\|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_E \quad \mathbf{y}_P - \mathbf{y}_E \quad \mathbf{z}_P - \mathbf{z}_E\|_{t=t_f}^T\|_2^2$$

为说明上述航天器追逃问题的一般求解方法, 下节将给出此追逃问题最优策略存在的必要条件。

2 最优策略存在的必要条件

在一般的微分对策数值求解中, 针对最优策略必要条件的求解是解决微分对策问题的关键。

令 $v_i^x, v_i^y, v_i^z (i=P, E)$ 为航天器对应3个坐标系的速度分量, 则式(1)可写作一阶动力学方程组, 即

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i^x(t) \\ \dot{y}_i(t) = v_i^y(t) \\ \dot{z}_i(t) = v_i^z(t) \\ \dot{v}_i^x(t) = \frac{2\mu}{r^3(t)} x_i(t) + 2\omega(t) v_i^y(t) + \dot{\omega}(t) y_i(t) + \omega^2(t) x_i(t) + T_i u_i^x(t) \\ \dot{v}_i^y(t) = -\frac{\mu}{r^3(t)} y_i(t) - 2\omega(t) v_i^x(t) - \dot{\omega}(t) x_i(t) + \omega^2(t) y_i(t) + T_i u_i^y(t) \\ \dot{v}_i^z(t) = -\omega^2(t) z_i(t) + T_i u_i^z(t) \end{cases} \quad (2)$$

根据微分对策原理^[3], 将 Hamilton 方程 H 定义为

$$H = H_P + H_E \quad (3)$$

式中:

$$H_P = \lambda_{1P} \dot{x}_P \lambda_{2P} \dot{y}_P + \lambda_{3P} \dot{z}_P + \lambda_{4P} \dot{v}_{xP} + \lambda_{5P} \dot{v}_{yP} + \lambda_{6P} \dot{v}_{zP}$$

$$H_E = \lambda_{1E} \dot{x}_E \lambda_{2E} \dot{y}_E + \lambda_{3E} \dot{z}_E + \lambda_{4E} \dot{v}_{xE} + \lambda_{5E} \dot{v}_{yE} + \lambda_{6E} \dot{v}_{zE}$$

为给出此追逃问题最优控制策略的必要条件, 令

$$\mathbf{x}_P = [\mathbf{x}_P \quad \mathbf{y}_P \quad \mathbf{z}_P \quad \mathbf{v}_P^x \quad \mathbf{v}_P^y \quad \mathbf{v}_P^z]^T$$

$$\mathbf{x}_E = [\mathbf{x}_E \quad \mathbf{y}_E \quad \mathbf{z}_E \quad \mathbf{v}_E^x \quad \mathbf{v}_E^y \quad \mathbf{v}_E^z]^T$$

$$\boldsymbol{\lambda}_P = [\lambda_{1P} \quad \lambda_{2P} \quad \lambda_{3P} \quad \lambda_{4P} \quad \lambda_{5P} \quad \lambda_{6P}]^T$$

$$\boldsymbol{\lambda}_E = [\lambda_{1E} \quad \lambda_{2E} \quad \lambda_{3E} \quad \lambda_{4E} \quad \lambda_{5E} \quad \lambda_{6E}]^T$$

其中, λ_P 和 λ_E 分别为协态向量, 则式(3)可表示为

$$H = \boldsymbol{\lambda}_P^T \dot{\mathbf{x}}_P + \boldsymbol{\lambda}_E^T \dot{\mathbf{x}}_E$$

根据最优策略存在的必要条件^[2], 协态方程为

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_P = -\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_P}\right)^T \quad (4)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_E = -\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_E}\right)^T \quad (5)$$

式(4), (5)相应的边值条件为

$$\boldsymbol{\lambda}_P(t_f) = \left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}_P}\right)^T \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_E(t_f) = \left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}_E}\right)^T \quad (7)$$

且追踪与逃逸航天器的最优策略 $\mathbf{u}_P^*$ 和 $\mathbf{u}_E^*$ 应满足

$$\mathbf{u}_P^* = \arg \min_{\mathbf{u}_P} H$$

$$\mathbf{u}_E^* = \arg \max_{\mathbf{u}_E} H \quad (8)$$

显然, 最优策略的必要条件式(2), (4), (5), (6), (7)组成了一个两点边值问题, 一般的两点边值问题可由多重打靶法求解^[8]。

3 半直接配点法

在半直接配点法中, 将由最优策略必要条件得到的追逐或逃逸航天器的协态变量加入到状态方程中, 同时将对对应航天器的最优控制量表达式代入对应的状态方程并加入约束条件, 进而将微分对策问题转化为最优控制问题。在求解时, 只需求解对应的支付函数最大或最小问题即可。相应的等价性证明参考文献^[8]。

3.1 半直接转换

半直接配点法将微分对策问题转化为最优控制问题, 这里将逃逸航天器对应的协态变量加入到微分方程中(对应的追逐航天器的半直接转化过程同理), 变换的方法简述如下, 令

$$\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}_P^T \quad \mathbf{x}_E^T \quad \boldsymbol{\lambda}_E^T]^T$$

将从式(8)中得到的最优控制变量 $\mathbf{u}_E^*$ 的表达式代入微分方程(2)中, 经过转化得到新的系统方程为

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_P^T & \dot{\mathbf{x}}_E^T & -\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_E}\right)^T \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

值得注意的是,在式(9)中,逃逸航天器 E 的动力学方程 $\dot{\mathbf{x}}_E$ 中含有最优控制量 $\mathbf{u}_E^*$ 的表达式。

由于协态变量 λ_E 加入到式(9)中,相应的终端约束方程 Ψ 定义为

$$\Psi = \lambda_E(t_f) - \left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}_E} \right)^T = 0$$

则变换后的支付函数为

$$J(\mathbf{u}_p) = \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} x_p - x_E & y_p - y_E & z_p - z_E \end{bmatrix}^T \Big|_{t=t_f} \right\|_2^2$$

寻找 $\mathbf{u}_p^*$, 使得支付函数 J 最小,即

$$J(\mathbf{u}_p^*) = \min_{\mathbf{u}_p} \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} x_p - x_E & y_p - y_E & z_p - z_E \end{bmatrix}^T \Big|_{t=t_f} \right\|_2^2$$

显然,微分对策问题已被转化为最优控制问题。接下来,将给出基于配点法求解转化后最优问题的方法。

3.2 半直接配点法的数值求解方法

这里考虑计算的准确性^[9],将采用五阶 Gauss-Lobatto 配点法求解上述最优问题。为说明此方

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(t) = & \tilde{\mathbf{x}}_i \left[1 + \frac{6}{\Delta t_i} (t - t_i) \right] \frac{4(t - t_{cm})^2 (t - t_{i+1})^2}{\Delta t_i^4} + \tilde{\mathbf{x}}_{t_{cm}} \frac{16(t - t_i)^2 (t - t_{i+1})^2}{\Delta t_i^4} + \\ & \tilde{\mathbf{x}}_{i+1} \left[1 - \frac{6}{\Delta t_i} (t - t_{i+1}) \right] \frac{4(t - t_i)^2 (t - t_{cm})^2}{\Delta t_i^4} + \mathbf{f}_i \frac{4(t - t_i) (t - t_{cm})^2 (t - t_{i+1})^2}{\Delta t_i^4} + \\ & \mathbf{f}_{t_{cm}} \frac{16(t - t_{cm}) (t - t_i)^2 (t - t_{i+1})^2}{\Delta t_i^4} + \mathbf{f}_{i+1} \frac{4(t - t_{i+1}) (t - t_i)^2 (t - t_{cm})^2}{\Delta t_i^4} \end{aligned}$$

式中: $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ 。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{c1} = & \frac{1}{686} \{ (39\sqrt{21} + 231) \tilde{\mathbf{x}}_i + 224\tilde{\mathbf{x}}_{t_{cm}} + (-39\sqrt{21} + 231) \tilde{\mathbf{x}}_{i+1} + \\ & \Delta t_i [(3\sqrt{21} + 21) \mathbf{f}_i - 16\sqrt{21} \mathbf{f}_{t_{cm}} + (3\sqrt{21} - 21) \mathbf{f}_{i+1}] \} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{c2} = & \frac{1}{686} \{ (-39\sqrt{21} + 231) \tilde{\mathbf{x}}_i + 224\tilde{\mathbf{x}}_{t_{cm}} + (39\sqrt{21} + 231) \tilde{\mathbf{x}}_{i+1} + \\ & \Delta t_i [(-3\sqrt{21} + 21) \mathbf{f}_i + 16\sqrt{21} \mathbf{f}_{t_{cm}} + (-3\sqrt{21} - 21) \mathbf{f}_{i+1}] \} \end{aligned}$$

近似解 $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ 对应 t_{c1} 和 t_{c2} 上的导数 $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{c1}, \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{c2}$ 为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{c1} = & \left(\frac{-90 - 16\sqrt{21}}{49} \right) \frac{\tilde{\mathbf{x}}_i}{\Delta t_i} + \left(\frac{90 - 16\sqrt{21}}{49} \right) \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{i+1}}{\Delta t_i} + \frac{32\sqrt{21}}{49} \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{t_{cm}}}{\Delta t_i} + \\ & \left(\frac{-9 - \sqrt{21}}{98} \right) \mathbf{f}_i + \left(\frac{-9 + \sqrt{21}}{98} \right) \mathbf{f}_{i+1} - \frac{32}{49} \mathbf{f}_{t_{cm}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{c2} = & \left(\frac{-90 + 16\sqrt{21}}{49} \right) \frac{\tilde{\mathbf{x}}_i}{\Delta t_i} + \left(\frac{90 + 16\sqrt{21}}{49} \right) \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{i+1}}{\Delta t_i} - \frac{32\sqrt{21}}{49} \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{t_{cm}}}{\Delta t_i} + \\ & \left(\frac{-9 + \sqrt{21}}{98} \right) \mathbf{f}_i + \left(\frac{-9 - \sqrt{21}}{98} \right) \mathbf{f}_{i+1} - \frac{32}{49} \mathbf{f}_{t_{cm}} \end{aligned}$$

法,不妨设式(9)对应的微分方程为

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}_p) \quad (10)$$

根据配点法,在 $[t_i, t_{i+1}]$ 区间上,需应用多项式近似式。由 Gauss-Lobatto 配点法^[9]可知,除端点 t_i, t_{i+1} 外,其余 3 个配点 t_{c1}, t_{cm} 和 t_{c2} 分别为

$$t_{c1} = t_{cm} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}} (t_{i+1} - t_i)$$

$$t_{cm} = \frac{t_{i+1} + t_i}{2}$$

$$t_{c2} = t_{cm} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}} (t_{i+1} - t_i)$$

接下来,将应用 5 次 Hermite 插值多项式和 Gauss-Lobatto 配点法构造式(10)解的近似多项式。由 5 次 Hermite 插值可知,若应用差值法近似式(10)的解,则需要 6 个条件,选择区间端点 t_i, t_{i+1} 和一个配点 t_{cm} 作为插值点。假设插值点处的状态量值为 $\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{\mathbf{x}}_{i+1}$ 和 $\tilde{\mathbf{x}}_{t_{cm}}$, 则其对应的向量导数值为 $\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_{i+1}$ 和 $\mathbf{f}_{t_{cm}}$ 。根据 Hermite 插值公式,可得式(10)解的 5 次多项式为

对应的 2 个配点 t_{c1} 和 t_{c2} 的近似解 $\tilde{\mathbf{x}}_{c1}$ 和 $\tilde{\mathbf{x}}_{c2}$ 为

令 $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{c1} = \mathbf{f}(t_{c1}) = \mathbf{f}_{c1}$ 和 $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{c2} = \mathbf{f}(t_{c2}) = \mathbf{f}_{c2}$, 分别得到 在配点 t_{c1} 和 t_{c2} 处的约束方程为

$$\mathbf{C}_{c1}(\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{\mathbf{x}}_{t_{cm}}, \tilde{\mathbf{x}}_{i+1}) = \frac{1}{360} \{ (32\sqrt{21} + 180)\tilde{\mathbf{x}}_i - 64\sqrt{21}\tilde{\mathbf{x}}_{t_{cm}} + (32\sqrt{21} - 180)\tilde{\mathbf{x}}_{i+1} + \Delta t_i [(9 + \sqrt{21})\mathbf{f}_i + 98\mathbf{f}_{c1} + 64\mathbf{f}_{t_{cm}} + (9 - \sqrt{21})\mathbf{f}_{i+1}] \} = 0 \quad (11)$$

$$\mathbf{C}_{c2}(\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{\mathbf{x}}_{t_{cm}}, \tilde{\mathbf{x}}_{i+1}) = \frac{1}{360} \{ (-32\sqrt{21} + 180)\tilde{\mathbf{x}}_i + 64\sqrt{21}\tilde{\mathbf{x}}_{t_{cm}} + (-32\sqrt{21} - 180)\tilde{\mathbf{x}}_{i+1} + \Delta t_i [(9 - \sqrt{21})\mathbf{f}_i + 98\mathbf{f}_{c2} + 64\mathbf{f}_{t_{cm}} + (9 + \sqrt{21})\mathbf{f}_{i+1}] \} = 0 \quad (12)$$

将式(11),(12)相加可得

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i+1} - \tilde{\mathbf{x}}_i = \frac{\Delta t_i}{180} (9\mathbf{f}_i + 49\mathbf{f}_{c1} + 64\mathbf{f}_{t_{cm}} + 49\mathbf{f}_{c2} + 9\mathbf{f}_{i+1}) \quad (13)$$

显然,式(13)与 Gauss-Lobatto 积分公式相同。值得注意的是, $\mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}_p)$ 也是控制变量 $\mathbf{u}_p$ 的函数。设在区间端点和配点上对应的数值分别为 $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{u}_{i+1}$, $\mathbf{u}_{c1}$, $\mathbf{u}_{t_{cm}}$ 和 $\mathbf{u}_{c2}$, 则约束方程(11),(12)可被重新表示为

$$\mathbf{C}_{c1}(\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{\mathbf{x}}_{t_{cm}}, \tilde{\mathbf{x}}_{i+1}, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{t_{cm}}, \mathbf{u}_{c1}, \mathbf{u}_{i+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

$$\mathbf{C}_{c2}(\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{\mathbf{x}}_{t_{cm}}, \tilde{\mathbf{x}}_{i+1}, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{t_{cm}}, \mathbf{u}_{c2}, \mathbf{u}_{i+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (15)$$

式中: N 为区间数。

通过上述过程,可将最优控制问题转化为数学规划问题,应用序列二次规划可求解此问题。由式(14),(15)可知,此数学规划问题在区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 上需要求解的变量分别是 $\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{\mathbf{x}}_{t_{cm}}, \tilde{\mathbf{x}}_{i+1}, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{u}_{c1}, \mathbf{u}_{c2}$ 和 $\mathbf{u}_{cm}$ 。因此,若状态变量为 n 维,控制变量为 r

维,则待求解变量的个数为 $(2N+1)n + (4N+1)r$ 。

4 数值仿真结果

根据动力学方程(1)所示,逃逸航天器在 $\hat{X}, \hat{Y}$ 与 $\hat{Z}$ 方向的运动可分离。因此,这里只在 $\hat{X}\hat{O}\hat{Y}$ 平面上求解近地航天器追逃问题。

为说明半直接配点法求解的特点,将给出不同的仿真实例。因空间站和大量的卫星存在于地球低轨道,故在仿真中,将原点轨道高度分别设为 500 km 和 1 000 km,并选择仿真时间均为 500 s。对于同样的仿真实例,采用基于必要条件的数值方法(如多重打靶法)进行求解,若迭代初值不准确,则很难得到收敛的解。

设原点轨道角速度 ω 为常数 ($\omega = \sqrt{\mu/r^3}$),在以下仿真中,令地球半径为 6 371 km。

2 个实例中,追逐航天器与逃逸航天器的初值见表 1,两航天器的单位质量加速度见表 2,其中, $g = 9.8 \times 10^{-3} \text{ km/s}^2$ 。

表 1 相对坐标系下的初值

Tab.1 Initial values with relative coordinate system

实例	x_P/km	y_P/km	$v_P^x/(\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$	$v_P^y/(\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$	x_E/km	y_E/km	$v_E^x/(\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$	$v_E^y/(\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$
1	-0.11	11.99	-0.013	0	19.74	60.13	-0.066	-0.011
2	20	0	0	-0.01	9.72	64.41	-0.064	-0.006

表 2 两航天器的单位质量加速度

Tab.2 Acceleration-to-mass of pursuer and evader

实例	T_p	T_E
1	0.055g	0.01g
2	0.086g	0.01g

为兼顾计算速度和计算准确性,选取 10 个子区间进行仿真。由子区间的选择可知,需要求解的变量为 293 个。在数值仿真计算中,运用 Gauss-Lobatto 配点法,将微分方程代数化后用 SNOPT 求解器进行求解^[10]。在仿真中,选用处理器型号为

Xeon E3-1230V2,内存为 8 GB 的台式机进行数值计算。设约束精度和优化允许误差均为 10^{-9} 。

在实例 1(原点轨道高度为 500 km)中,两航天器轨迹和最优控制变量的变化曲线如图 2 所示。图 2(a),2(b)分别给出了追逐航天器与逃逸航天器在固定时间内 $\hat{X}$ 方向和 $\hat{Y}$ 方向的轨迹变化情况。追逐航天器的最优控制量随时间变化曲线如图 2(c)所示,逃逸航天器的最优控制量随时间变化曲线如图 2(d)所示。由图 2 可知:通过半直接配点法可获得航天器追逃问题收敛的解,追逐航天器可追上逃逸航天器。

在仿真实例 1 中,根据数值计算结果可知:约束误差为 $1.881\,3\times 10^{-10}$,计算时间为 15.07 s。

在实例 2(原点轨道高度为 1 000 km)中,两航天器轨迹和最优控制变量的变化曲线如图 3 所示。

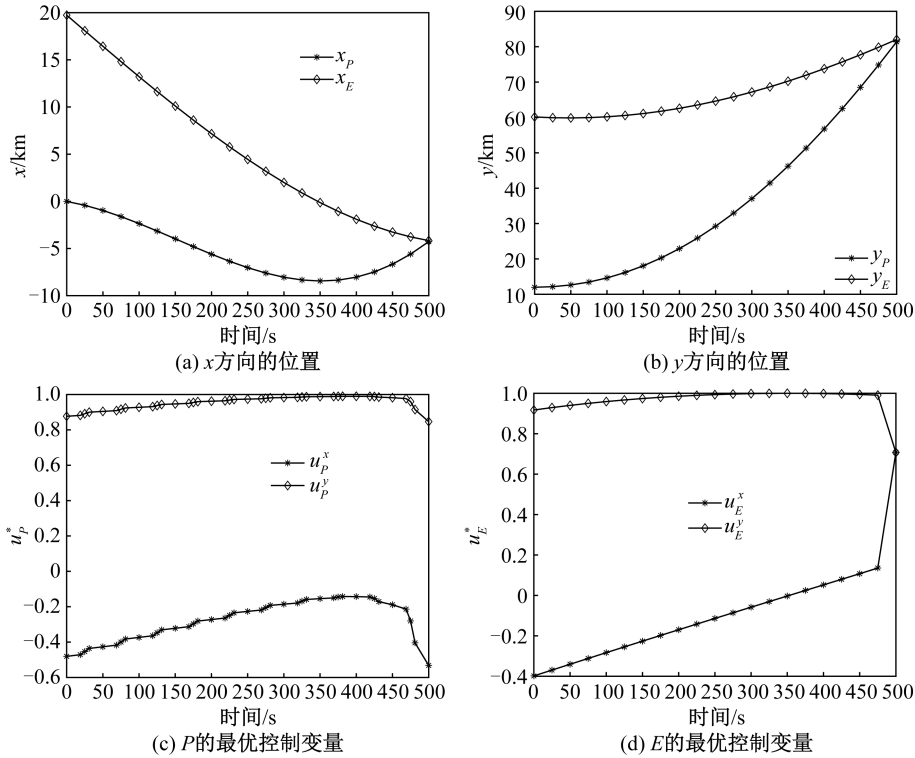


图 2 实例 1:追逐和逃逸航天器的轨迹和最优控制变量

Fig.2 Test case 1: trajectories and optimal control variables of pursuer and evader

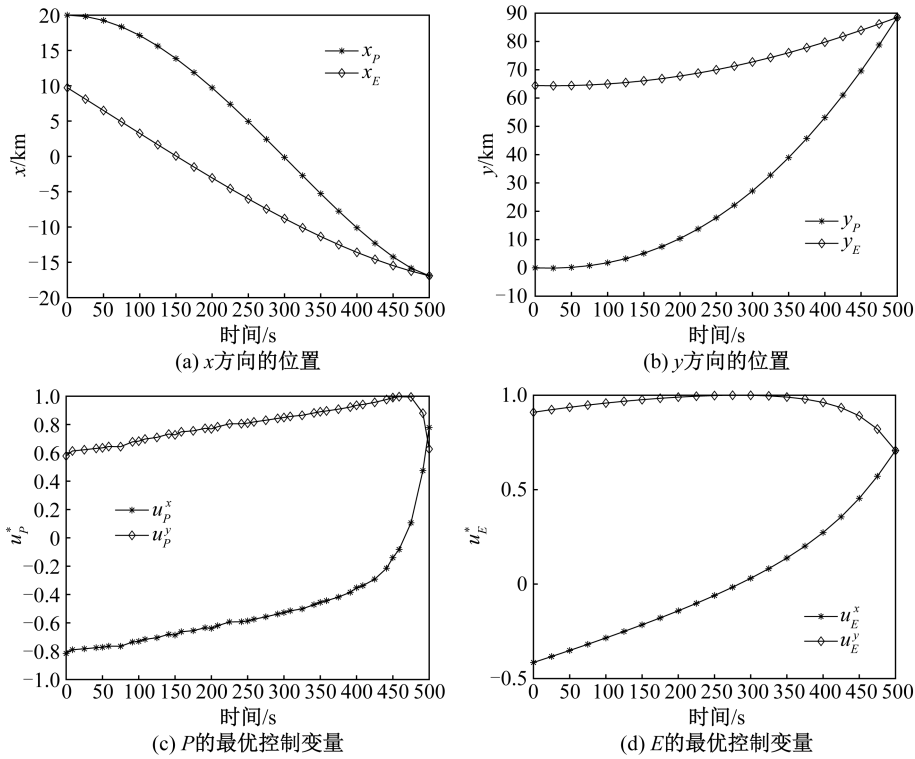


图 3 实例 2:追逐和逃逸航天器的轨迹和最优控制变量

Fig.3 Test case 2: trajectories and optimal control variables of pursuer and evader

在图3中,各子图的表示方法同图2。由图3可知:追逐航天器可追上逃逸航天器。在仿真实例2中,根据数值计算结果可知:约束误差为 $2.551\ 2 \times 10^{-10}$,计算时间为17.58 s。

由图2可知:在500 s的规定时间内,追逐航天器对逃逸航天器进行了成功拦截,追逐者和逃逸者的控制变量变化规律相似,两者采用了近似的追逃策略。由图3可知:追逐者和逃逸者的对策时间为500 s,在500 s内,追逐航天器对逃逸航天器进行了成功拦截。

5 结论

本文采用半直接配点法求解了近地轨道的追逃问题,得到了收敛的解,半直接配点法将一个微分对策问题转化成了一个最优控制问题,运用 Gauss-Lobatto 五阶配点法,并结合序列二次规划法,最终解决了一个非线性的数学规划问题。半直接配点法求解微分对策问题时,可避免求解困难的两点边值问题。该算法具有收敛性好、应用简单的特点。数值仿真实例验证了这种求解方法的可行性。该方法提高了求解两点边值问题的收敛性,为求解含有双方控制变量的微分对策问题提供了一种思路。

参考文献

- [1] ISAACS R. Differential games [M]. New York: John Wiley and Sons, 1965: 20.
- [2] BERKOVITZ L D. Necessary conditions for optimal strategies in a class of differential games and control problems[J]. SIAM Journal on Control, 1967, 5(1): 1-24.

- [3] FRIEDMAN A. Differential games [M]. Rhode Island: American Mathematical Society, 1974: 127.
- [4] DICKMANNS E D, WELL K H. Approximate solution of optimal control problems using third order hermite polynomial functions[C]//Optimization Techniques IFIP Technical Conference. 1974: 158-166.
- [5] STOER J, AND BULIRSCH R. Introduction to numerical analysis [M]. New York: Springer, 1983: 516-524.
- [6] HORIE K, CONWAY B A. Optimal fighter pursuit-evasion maneuvers found via two-sided optimization [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2006, 29(1): 105-112.
- [7] CONWAY B A, PONTANI M. Optimal interception of evasive missile warheads: numerical solution of the differential game[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2008, 31(4): 1111-1122.
- [8] SUN S T, ZHANG Q H, LOXTON R, et al. Numerical solution of a pursuit-evasion differential game involving two spacecraft in low earth orbit[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2015, 11(4): 1127-1147.
- [9] HERMAN A L, CONWAY B A. Direct optimization using collocation based on high-order Gauss-Lobatto quadrature rules[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1996, 19(3): 592-599.
- [10] GILL P, MURRAY W, SAUNDERS M. User's guide for SNOPT version 7: software for large-scale nonlinear programming [R/OL]. (2017-04-06) [2018-07-20]. <http://www.sbsi-sol-optimize.com/manuals/SNOPT%20Manual.pdf>.

(本文编辑:李栋颢)