

非零初末角速度约束下的卫星实时姿态 机动规划

刘 刚^{1,2}, 陈殿印^{1,2}, 张文政^{1,2}, 黄 静^{1,2}

(1.上海航天控制技术研究所,上海 201109;2.上海市空间智能控制技术重点实验室,上海 201109)

摘 要:针对存在初末角速度非零约束的卫星姿态机动任务,提出了一种基于旋转分解的实时解析规划算法。该方法通过将卫星三维旋转分解为多个绕固定轴的一维欧拉旋转,使非线性规划问题转换为多个一维空间上的线性规划问题,再将各个线性规划的结果通过四元数运算融合为最终的姿态机动规划结果。与过去针对此类问题经常采用的非线性规划方法相比,该规划算法可以通过解析的形式给出,因此不需要通过多次数值迭代得到可行解,运算量少,可以实时进行计算,适合实际在轨应用。

关键词:姿态机动;四元数;欧拉轴旋转;旋转分解;机动规划

中图分类号:V 448.22 文献标志码:A

DOI: 10.19328/j.cnki.1006-1630.2020.04.005

Real-Time Attitude Maneuver Programming for Satellites under Nonzero Initial and Final Angular Velocity Constraints

LIU Gang^{1,2}, CHEN Dianyin^{1,2}, ZHANG Wenzheng^{1,2}, HUANG Jing^{1,2}

(1.Shanghai Institute of Spacecraft Control Technology, Shanghai 201109, China;

2.Shanghai Laboratory of Aerospace Intelligent Control Technology, Shanghai 201109, China)

Abstract: A real-time analytical programming algorithm based on the rotation decomposition is proposed for satellite attitude maneuver tasks under nonzero initial and final angular velocity constraints. By decomposing the three-dimensional rotation of the satellite into several one-dimensional Euler-axis rotations around the fixed axis, the original nonlinear programming problem is converted into several one-dimensional linear programming problems. Then, the result of each linear programming problem is integrated into the final attitude maneuver programming result with quaternion calculations. Compared with the nonlinear programming methods often used for such problems, the proposed programming algorithm can give an analytical solution, and thus does not need multiple numerical iterations to achieve an appropriate solution. It consumes less computation resources, and is suitable for practical in-orbit applications.

Key words: attitude maneuver; quaternion; Euler-axis rotation; rotation decomposition; maneuver programming

0 引言

因为卫星入轨操作或应用任务的需求,需要控制卫星进行姿态调整,从初始姿态转向一个预定的目标姿态,即卫星姿态机动^[1]。目前,卫星姿态控制所使用的执行机构包括反作用飞轮、控制力矩陀螺以及姿态控制推力器等,均存在一定的约束条件。

因此,为了使卫星能够在一定的约束条件下完成姿态机动,并在机动完成后快速稳定,以尽早开始执行任务,需要对卫星的姿态机动路径进行规划。

目前,关于航天器姿态机动路径规划的研究已经有了许多成果。BILIMORIA 等^[1]利用庞特里亚金极大值原理和打靶法,解决了惯性对称航天器的

收稿日期:2019-07-31;修回日期:2019-08-29

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61803258);上海市科技人才计划资助项目(17YF1408400,17YF1408300)

作者简介:刘 刚(1985—),男,博士研究生,主要研究方向为航天器姿态和轨道控制。

重指向 (rest-to-rest) 的路径规划问题,并首次证明绕空间欧拉轴旋转的机动路径并非最优路径。此后,数值计算方法^[3-4]、随机优化方法^[5]、非线性优化方法^[6-7]等均被用于求解卫星姿态机动问题。不过,由于卫星的运动学和动力学均为非线性,不能直接对其求解,而且受星上技术条件的限制,目前卫星真正能够在轨使用的实时姿态机动规划算法基本都是假设卫星的初末角速度不为零。然而在实际任务中,很多情况下卫星机动前后的角速度并不为零,特别是对于机动姿态和初末角速度不在同一旋转轴的情况,会显著增加机动规划的难度。

现有的方法通常是将角速度和姿态在时间段上分开处理,如先将姿态控制到目标姿态附近的一个范围内,再将角速度加速至目标值,这样处理会增加机动完成到开始执行任务之间的过渡时间,不利于提高卫星的敏捷性。因此,如果能够使卫星在机动到位的同时角速度也达到目标角速度,则可以缩短每次机动任务耗费的时间,进一步提高卫星的能力。但是,目前能够实现任意初末角速度约束的机动规划算法都是通过非线性优化算法或者大量的数值迭代运算实现的,例如近几年被广泛使用的基于伪谱法的机动规划^[8-13]。这些方法虽然可以满足一定的最优指标,但存在计算量过大、占用星上计算资源过多、耗时较长以及数值计算不稳定的问题,在现有的技术状态下基本不具备在轨应用的条件。即使能够应用,也需要地面事先进行离线规划再上注到卫星(参考 2006 年和 2007 年国际空间站的两次姿态机动^[14]和 2010 年日冕探测器 (TRACE) 的时间最优姿态机动在轨测试^[15]),不具备实时性。OH 等^[16]研究了可实时控制的动到静 (moving-to-rest) 机动,但是其假定机动轴和初始角速度轴一致,实际上绝大多数任务都不满足该约束条件,所以应用价值有限。因此,有必要设计一种结构简单、计算量小、可靠性高的姿态机动规划算法,在现有的星载计算机技术条件下可以在轨实时地完成任意初末角速度约束下的姿态机动路径规划。

本文针对初末角速度不为零的卫星姿态机动任务,提出了一种不需要反复迭代数值寻优的规划算法,利用四元数的性质将卫星三维方向上的姿态机动分解为多个一维方向上的机动,以解析的形式给出各个一维机动的规划结果,再通过简单的四元数运算合成为最终的姿态机动规划结果。与过去

针对此类任务常用的非线性数值规划相比,该算法虽然没有依据最优化原理进行设计,但给出了规划问题的解析解,即规划结果可以通过与时间 t 相关的解析函数得到,计算量少,速度快,耗费星上计算资源少,并且避免了数值规划求解失败的问题,可靠性高,可以在现有的星上技术条件下在轨实时应用,具有较高的实际应用价值。

1 卫星姿态机动旋转的分解

卫星姿态运动学模型为

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \bar{\boldsymbol{\omega}} \quad (1)$$

动力学模型为

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}) + \mathbf{u}_c \quad (2)$$

式中: $\mathbf{q} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^\top$ 为卫星姿态四元数; $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^\top$ 为卫星姿态角速度; $\bar{\boldsymbol{\omega}} = [0 \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^\top = [0, \boldsymbol{\omega}]$ 为纯四元数形式的姿态角速度; \mathbf{J} 为卫星转动惯量矩阵; \mathbf{h} 为星上转动部件的角动量; $\mathbf{u}_c = [u_{cx} \ u_{cy} \ u_{cz}]^\top$ 为控制力矩; \otimes 为四元数乘法; $\boldsymbol{\omega}^\times$ 为 $\boldsymbol{\omega}$ 的斜对称矩阵。

初末角速度不为零的卫星姿态规划问题,可以理解为在给定初始条件(初始姿态四元数 $\mathbf{q}_i = [q_{i0} \ q_{i1} \ q_{i2} \ q_{i3}]^\top$, 初始角速度 $\boldsymbol{\omega}_i = [\omega_{ix} \ \omega_{iy} \ \omega_{iz}]^\top$)、终端条件(目标姿态四元数 $\mathbf{q}_f = [q_{f0} \ q_{f1} \ q_{f2} \ q_{f3}]^\top$ 和目标角速度 $\boldsymbol{\omega}_f = [\omega_{fx} \ \omega_{fy} \ \omega_{fz}]^\top$)下,满足一定约束(通常是角速度的大小存在约束)条件的要求对运动学微分方程(1)进行求解。此外,由于姿态控制的执行机构力矩输出能力存在上限,机动规划也需要满足卫星角加速度的约束条件。

式(1)和式(2)是非线性微分方程,即使不考虑相关的约束条件,也难以得到解析解,这也是过去针对此类规划问题,多数论文采用非线性数值优化算法进行迭代求解的原因。但是,如果初末状态为定值,则卫星机动过程的角速度方向在某个坐标系内固定不变,可表示为 $\boldsymbol{\omega} = |\boldsymbol{\omega}| \mathbf{n}$, 其中, $|\cdot|$ 为求向量模的运算, $\mathbf{n} = [n_x \ n_y \ n_z]^\top$ 为旋转轴的单位向量,机动过程中任意时刻 t 的卫星姿态可以表示为

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} \cos\left(0.5 \int_0^t |\omega| d\tau\right) & n_x \sin\left(0.5 \int_0^t |\omega| d\tau\right) \\ n_y \sin\left(0.5 \int_0^t |\omega| d\tau\right) & n_z \sin\left(0.5 \int_0^t |\omega| d\tau\right) \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

利用该性质以及四元数和三维空间旋转之间的关系,在机动过程中的任意时刻 t ,卫星的姿态可以分解为 N 个互相独立的旋转,即

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_i \otimes \mathbf{q}_0(t) \otimes \mathbf{q}_1(t) \otimes \mathbf{q}_2(t) \cdots \otimes \mathbf{q}_N(t) \quad (4)$$

式中:旋转分解的个数 N 是可变量,需要根据任务的约束条件进行选择; $\mathbf{q}_j(t)$, $j=1,2,\dots,N$ 表示从坐标系 R_{j-1} 到 R_j 的旋转,所以其对应的旋转轴 \mathbf{n}_j 在坐标系 R_{j-1} 和 R_j 内是相同的。

因此,在机动的任意时刻 t ,卫星的瞬时角速度可以分解为

$$\begin{aligned} [0, \boldsymbol{\omega}(t)] &= \boldsymbol{\omega}_0(t) + \boldsymbol{\omega}_1(t) + \cdots + \boldsymbol{\omega}_N(t) = \\ & |\boldsymbol{\omega}_0(t)| (\mathbf{q}_1(t) \otimes \mathbf{q}_2(t) \cdots \otimes \mathbf{q}_N(t))^{-1} \otimes \\ & [0, \mathbf{n}_0] \otimes (\mathbf{q}_1(t) \otimes \mathbf{q}_2(t) \cdots \otimes \mathbf{q}_N(t)) + \\ & |\boldsymbol{\omega}_1(t)| (\mathbf{q}_2(t) \cdots \otimes \mathbf{q}_N(t))^{-1} \otimes [0, \mathbf{n}_1] \otimes \\ & (\mathbf{q}_2(t) \cdots \otimes \mathbf{q}_N(t)) + \cdots + |\boldsymbol{\omega}_N(t)| [0, \mathbf{n}_N] \end{aligned} \quad (5)$$

式中: $\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_N$ 为常值向量,表示坐标系 R_j 内旋转四元数 $\mathbf{q}_j(t)$ 对应的旋转轴单位向量。

根据式(4)和式(5),三维空间的旋转可分解为在多个旋转轴方向表示的一维旋转的组合。因一维旋转是可以进行解析求解,所以对三维空间内卫星机动路径进行规划,只需要在多个一维旋转方向上分别进行规划,再通过式(4)和式(5)融合即可。

2 姿态机动规划

本文设计的算法考虑卫星初末状态、角速度和角加速度的约束(或者力矩约束),将整个机动过程分为3个旋转完成。第1个旋转实现卫星姿态到目标姿态的机动,第2个旋转将卫星角速度加速到目标角速度,第3个旋转消除初始角速度的影响。这3个旋转之间不存在耦合关系,可独立进行规划,再通过算法进行融合后得到最终的规划结果。机动规划使用的输入信息有:初始姿态四元数 \mathbf{q}_i ,目标四元数 \mathbf{q}_f ,机动开始时刻 t_i ,结束时刻 t_f ,机动持续时间 $T_m = t_f - t_i$,机动开始时的卫星角速度为 $\boldsymbol{\omega}_i$ (卫星姿态本体系内表示),机动到位后的角速度 $\boldsymbol{\omega}_f$ (卫星姿态本体系内表示),机动角加速度上限 a_{\max} (通常情况下该加速度要小于该方向上执行机构的输出能力,留出一定的余量应对卫星动力学不确定性的影响)。

机动规划和目标姿态计算按如下步骤完成:

步骤1 将目标四元数分解为 $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ 3个旋转四元数,满足

$$\mathbf{q}_f = \mathbf{q}_i \otimes \mathbf{q}_0 \otimes \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2 \quad (6)$$

式中: \mathbf{q}_1 为完成卫星姿态到目标姿态的旋转四元数; \mathbf{q}_2 为卫星角速度加速到目标角速度的旋转四元数; \mathbf{q}_0 为消除初始角速度影响的旋转四元数。

在机动过程中的任意时刻 $t \in [t_i, t_f]$,合成后的旋转四元数 $\mathbf{q}(t)$ 为

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_i(t) \otimes \mathbf{q}_0(t) \otimes \mathbf{q}_1(t) \otimes \mathbf{q}_2(t) \quad (7)$$

需要满足的初末状态约束为

$$\mathbf{q}_0(t_i) = \mathbf{q}_2(t_i) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \mathbf{q}(t_f) = \mathbf{q}_f$$

$$\boldsymbol{\omega}_0(t_i) = \boldsymbol{\omega}(t_i) = \boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\omega}_0(t_f) = 0$$

$$\boldsymbol{\omega}_2(t_i) = 0, \boldsymbol{\omega}_2(t_f) = \boldsymbol{\omega}(t_f) = \boldsymbol{\omega}_f$$

$$\boldsymbol{\omega}_1(t_i) = \boldsymbol{\omega}_1(t_f) = 0$$

下面分别对这3个旋转单独进行规划。

步骤2 通过规划 \mathbf{q}_0 将初始角速度 $\boldsymbol{\omega}_i$ 降低到0。采用如下公式求取该旋转的旋转轴 \mathbf{n}_0 ,机动过程中任意时刻 $t \in [t_i, t_f]$ 的瞬时角速度 $\boldsymbol{\omega}_0(t)$ 和四元数 $\mathbf{q}_0(t)$:

$$\mathbf{n}_0 = [n_{0x} \ n_{0y} \ n_{0z}]^T = \frac{\boldsymbol{\omega}_i}{|\boldsymbol{\omega}_i|} \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\omega}_0(t) = \boldsymbol{\omega}_i \left(0.5 \sin \left(\frac{(t_f - t + t_i - 0.5T_m)\pi}{T_m} \right) + 0.5 \right) \quad (9)$$

$$\theta_0(t) = \int_{t_i}^t |\boldsymbol{\omega}_0(\tau)| d\tau \quad (10)$$

$$\mathbf{q}_0(t) = [\cos(0.5\theta_0(t)) \ n_{0x} \sin(0.5\theta_0(t)) \ n_{0y} \sin(0.5\theta_0(t)) \ n_{0z} \sin(0.5\theta_0(t))]^T \quad (11)$$

对应的角速度曲线如图1所示。

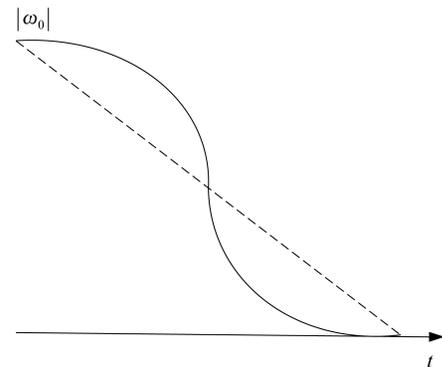


图1 旋转0对应的角速度规划曲线

Fig.1 Angular velocity programming curve corresponding to rotation 0

注 1: 这里之所以选择正弦曲线的形式对角度进行规划, 是因为在机动的初始和结束时刻, 正弦规划对应的角加速度为 0, 可以起到一定的被动挠性抑制作用。本文所有的规划均采用这种正弦或双曲正切函数的形式进行设计。

步骤 3 通过规划 q_2 将卫星加速到 ω_f 。采用如下公式求取该旋转的旋转轴 n_2 、机动过程中任意时刻 $t \in [t_i, t_f]$ 的瞬时角速度 $\omega_2(t)$ 和四元数 $q_2(t)$:

$$n_2 = [n_{2x} \quad n_{2y} \quad n_{2z}]^T = \frac{\omega_f}{|\omega_f|} \quad (12)$$

$$\omega_2(t) = \omega_f \left(0.5 \sin \left(\frac{(t_f - t + t_i - 0.5T_m)\pi}{T_m} \right) + 0.5 \right) \quad (13)$$

$$\theta_2(t) = \int_{t_i}^t |\omega_2(\tau)| d\tau \quad (14)$$

$$q_2(t) = [\cos(0.5\theta_2(t)) \quad n_{0x} \sin(0.5\theta_2(t)) \quad n_{0y} \sin(0.5\theta_2(t)) \quad n_{0z} \sin(0.5\theta_2(t))]^T \quad (15)$$

对应的角速度曲线如图 2 所示。

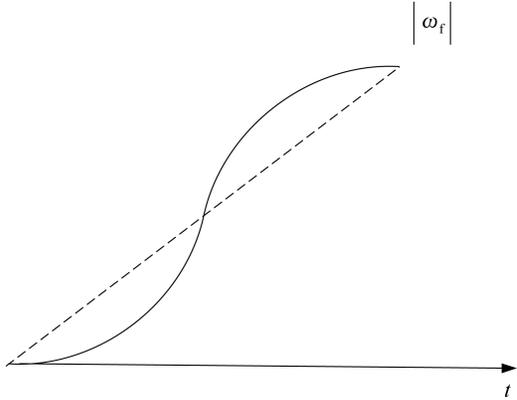


图 2 旋转 2 对应的角速度规划曲线

Fig.2 Angular velocity programming curve corresponding to rotation 2

步骤 4 通过规划 q_1 将卫星姿态从初始姿态 q_i 旋转到目标姿态 q_f 。采用如下公式求取该旋转的旋

转轴 e_1 、机动过程中任意时刻 $t \in [t_i, t_f]$ 的瞬时角速度 $\omega_1(t)$ 和四元数 $q_1(t)$:

$$q_1(t_i) = [q_{10} \quad q_{11} \quad q_{12} \quad q_{13}]^T = q_0^{-1}(t_i) \otimes q_i^{-1} \otimes q_i \otimes q_2^{-1}(t_i) \quad (16)$$

$$\theta_1(t_i) = 2a \cos(q_{10}) \quad (17)$$

$$n_1 = [n_{1x} \quad n_{1y} \quad n_{1z}]^T = \left[\frac{q_{11}}{\sin(\theta_1(t_i))} \quad \frac{q_{12}}{\sin(\theta_1(t_i))} \quad \frac{q_{13}}{\sin(\theta_1(t_i))} \right]^T \quad (18)$$

q_1 对应旋转的加速/减速时间 t_{acc} 以及匀速时间 t_{const} 为

$$t_{const} = \begin{cases} \sqrt{T_m^2 - 4\theta_1(t_i)/a_{max}}, & \text{if } T_m^2 - 4\theta_1(t_i)/a_{max} > 0 \\ 0, & \text{if } T_m^2 - 4\theta_1(t_i)/a_{max} \leq 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$t_{acc} = \frac{T_m - t_{const}}{2} \quad (20)$$

角速度 $\omega_1(t)$ 为

$$\omega_1(t) = \begin{cases} t_{acc} a_{max} \left(0.5 \sin \left(\frac{t - t_i - 0.5t_{acc}}{t_{acc}} \pi \right) + 0.5 \right) e_1, & \text{if } t_i < t \leq t_i + t_{acc} \\ t_{acc} a_{max} e_1, & \text{if } t_i + t_{acc} < t < t_i + t_{acc} + t_{const} \\ t_{acc} a_{max} \left(0.5 \sin \left(\frac{t_f - t - 0.5t_{acc}}{t_{acc}} \pi \right) + 0.5 \right) e_1, & \text{if } t_i + t_{acc} + t_{const} \leq t < t_f \end{cases} \quad (21)$$

瞬时转过的角度 $\theta_1(t)$ 为

$$\theta_1(t) = \int_{t_i}^t |\omega_1(\tau)| d\tau \quad (22)$$

对应的瞬时四元数 $q_1(t)$ 为

$$q_1(t) = [\cos(0.5\theta_1(t)) \quad n_{0x} \sin(0.5\theta_1(t)) \quad n_{0y} \sin(0.5\theta_1(t)) \quad n_{0z} \sin(0.5\theta_1(t))]^T \quad (23)$$

对应的角速度曲线如图 3 所示。

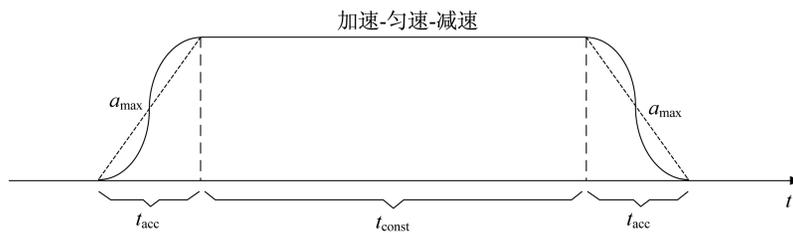


图 3 旋转 1 对应的角速度规划曲线

Fig.3 Angular velocity programming curve corresponding to rotation 1

步骤 5 计算当前时刻 t 合成后的旋转四元数 $q(t)$ 和角速度 $\omega(t)$, 即规划得到的目标四元数和角速度如下:

$$q(t) = q_i(t) \otimes q_0(t) \otimes q_1(t) \otimes q_2(t) \quad (24)$$

$$[0, \omega(t)] = (q_1(t) \otimes q_2(t))^{-1} \otimes [0, \omega_0(t)] \otimes (q_1(t) \otimes q_2(t)) + q_2^{-1}(t) \otimes [0, \omega_1(t)] \otimes q_2(t) + [0, \omega_2(t)] \quad (25)$$

式中: $[0, \omega(t)]$ 为由三维向量 $\omega(t)$ 构成的纯四元数, 本文都采用这种方式表示由三维向量构成的四维纯四元数。

步骤 6 通过差分算法求得规划角速度对应的角加速度, 再根据卫星动力学模型计算用于姿态跟踪控制器的前馈力矩。

注 2: 在上述规划过程中, 初始角速度的消除和末端角速度的加速分为两部分完成, 对应的起始时刻和终端时刻并不需要限定为 t_i 和 t_f (如果限定在这两个时刻, 可能导致角速度调整时间较长, 产生的旋转角度较大, 增加不必要的机动角度), 可任意调整, 达到满意效果, 只需在时间区间 $[t_i, t_f]$ 内即可。

注 3: 在 ω_0 和 ω_1 的规划过程中, 并没有显示出角加速度约束 a_{\max} , 这是因为根据式 (9) 和式 (13), 角加速度最大值与卫星初末角速度 ω_i 和 ω_f 以及机动的持续时间存在解析关系, 可以通过调整这两部分旋转各自的起始和结束时间使角加速度满足约束条件的要求。

上述旋转分解的方式并不固定, 例如为了防止角速度加速过程产生多余的角度旋转, 可以将消除初始角速度和加速至目标角速度合并为同一个过程来完成。此时机动旋转仍然分解为 3 个旋转, 但 3 个旋转的乘法顺序变为

$$q_i = q_i \otimes q_1 \otimes q_2 \otimes q_0 \quad (26)$$

对应的规划算法为

1) 通过规划 q_0 计算初始角速度 ω_i 的影响。采用如下公式求取该旋转的旋转轴 n_0 、机动过程中任意时刻 $t \in [t_i, t_f]$ 的瞬时角速度 $\omega_0(t)$ 和四元数 $q_0(t)$:

$$n_0 = [n_{0x} \quad n_{0y} \quad n_{0z}]^T = \frac{\omega_i}{|\omega_i|} \quad (27)$$

$$\omega_0(t) = \omega_i \quad (28)$$

$$\theta_0(t) = \int_{t_i}^t |\omega_0(\tau)| d\tau \quad (29)$$

$$q_0(t) = \cos(0.5\theta_0(t))n_{0x} \sin(0.5\theta_0(t))n_{0y} \sin(0.5\theta_0(t))n_{0z} \sin(0.5\theta_0(t))]^T \quad (30)$$

2) 通过规划 q_2 将卫星角速度从 ω_i 加速到 ω_f 。首先计算从 ω_i 和 ω_f 之间的角速度差 $\Delta\omega$:

$$[0, \Delta\omega] = q_0(t) \otimes [0, \omega_f] \otimes q_0^{-1}(t) - [0, \omega_0] \quad (31)$$

再根据 $\Delta\omega$ 对 $\omega_2(t)$ 进行规划。采用与前述相同的规划方法, 即

$$n_2 = [n_{2x} \quad n_{2y} \quad n_{2z}]^T = \frac{\Delta\omega}{|\Delta\omega|} \quad (32)$$

$$\omega_2(t) = \Delta\omega \left(0.5 \sin \left(\frac{(t_f - t + t_i - 0.5T_m)\pi}{T_m} \right) + 0.5 \right) \quad (33)$$

$$\theta_2(t) = \int_{t_i}^t |\omega_2(\tau)| d\tau \quad (34)$$

$$q_2(t) = \cos(0.5\theta_2(t))n_{0x} \sin(0.5\theta_2(t))n_{0y} \sin(0.5\theta_2(t))n_{0z} \sin(0.5\theta_2(t))]^T \quad (35)$$

3) 通过规划 q_1 将卫星姿态从初始姿态 q_i 旋转到目标姿态 q_f 。采用如下公式求取该旋转的旋转轴 e_1 、机动过程中任意时刻 $t \in [t_i, t_f]$ 的瞬时角速度 $\omega_1(t)$ 和四元数 $q_1(t)$:

$$q_1(t_i) = [q_{10} \quad q_{11} \quad q_{12} \quad q_{13}]^T = q_i^{-1} \otimes q_f \otimes q_0^{-1}(t_i) \otimes q_2^{-1}(t_i) \quad (36)$$

$$\theta_1(t_i) = 2a \cos(q_{10}) \quad (37)$$

$$e_1 = [e_{1x} \quad e_{1y} \quad e_{1z}]^T = \left[\frac{q_{11}}{\sin(\theta_1(t_i))} \quad \frac{q_{12}}{\sin(\theta_1(t_i))} \quad \frac{q_{13}}{\sin(\theta_1(t_i))} \right]^T \quad (38)$$

q_1 对应旋转的加速/减速时间 t_{acc} 以及匀速时间 t_{const} 为

$$t_{\text{const}} = \begin{cases} \sqrt{T_m^2 - 4\theta_1(t_i)/a_{\max}}, & \text{if } T_m^2 - 4\theta_1(t_i)/a_{\max} > 0 \\ 0, & \text{if } T_m^2 - 4\theta_1(t_i)/a_{\max} \leq 0 \end{cases} \quad (39)$$

$$t_{\text{acc}} = \frac{T_m - t_{\text{const}}}{2} \quad (40)$$

角速度 $\omega_1(t)$ 为

$$\omega_1(t) = \begin{cases} t_{\text{acc}} a_{\max} \left(0.5 \sin \left(\frac{t - t_i - 0.5t_{\text{acc}}}{t_{\text{acc}}} \pi \right) + 0.5 \right) e_1, & \text{if } t_i < t < t_i + t_{\text{acc}} \\ t_{\text{acc}} a_{\max} e_1, & \text{if } t_i + t_{\text{acc}} < t < t_i + t_{\text{acc}} + t_{\text{const}} \\ t_{\text{acc}} a_{\max} \left(0.5 \sin \left(\frac{t_f - t - 0.5t_{\text{acc}}}{t_{\text{acc}}} \pi \right) + 0.5 \right) e_1, & \text{if } t_i + t_{\text{acc}} + t_{\text{const}} < t < t_f \end{cases} \quad (41)$$

瞬时转过的角度 $\theta_1(t)$ 为

$$\theta_1(t) = \int_{t_1}^t |\boldsymbol{\omega}_1(\tau)| d\tau \quad (42)$$

对应的瞬时四元数 $\boldsymbol{q}_1(t)$ 为

$$\boldsymbol{q}_1(t) = [\cos(0.5\theta_1(t)) \quad n_{0x} \sin(0.5\theta_1(t)) \\ n_{0y} \sin(0.5\theta_1(t)) \quad n_{0z} \sin(0.5\theta_1(t))]^T \quad (43)$$

4) 计算当前时刻 t 合成后的旋转四元数 $\boldsymbol{q}(t)$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}(t)$, 即规划得到的目标四元数和角速度为

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_i \otimes \boldsymbol{q}_1(t) \otimes \boldsymbol{q}_2(t) \otimes \boldsymbol{q}_0(t) \quad (44)$$

$$[0, \boldsymbol{\omega}(t)] = (\boldsymbol{q}_2(t) \otimes \boldsymbol{q}_0(t))^{-1} \otimes [0, \boldsymbol{\omega}_1(t)] \otimes \\ (\boldsymbol{q}_2(t) \otimes \boldsymbol{q}_0(t)) + \boldsymbol{q}_0^{-1}(t) \otimes \\ [0, \boldsymbol{\omega}_2(t)] \otimes \boldsymbol{q}_0(t) + [0, \boldsymbol{\omega}_0(t)] \quad (45)$$

5) 通过差分算法求得规划角速度对应的角加速度, 再根据卫星动力学模型得到用于姿态跟踪控制器的前馈力矩。

注 4: 本文所设计的规划算法同样适用于初始角速度或者末端角速度为 0 的情况。如果初始角速度为 0, 即静到动 (rest-to-moving) 的机动, 取

$$\boldsymbol{\omega}_0(t) = 0, \boldsymbol{q}_0(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (46)$$

如果末端角速度为 0, 即动到静 (moving-to-rest) 的机动, 对于第一种规划方法, 取

$$\boldsymbol{\omega}_2(t) = 0, \boldsymbol{q}_2(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (47)$$

对于第二种规划方法, 取

$$\boldsymbol{\omega}_f = 0 \quad (48)$$

如果初末角速度均 0, 即静到静 (rest-to-rest) 的机动, 取

$$\boldsymbol{\omega}_0(t) = 0, \boldsymbol{q}_0(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ \boldsymbol{\omega}_2(t) = 0, \boldsymbol{q}_2(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (49)$$

3 数学仿真

本部分通过在 Matlab 环境下的数学仿真对所设计的规划算法进行验证, 仿真的初始条件如下。

卫星转动惯量为

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 2000 & 0 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 \\ 0 & 0 & 2500 \end{bmatrix} \quad (50)$$

卫星初始姿态四元数为

$$\boldsymbol{q}_i = [\cos(\pi/8) \quad \sin(\pi/8) \quad 0 \quad 0]^T \quad (51)$$

对应的旋转欧拉角为

$$\varphi = 45^\circ, \theta = \psi = 0^\circ \quad (52)$$

初始角速度 ($^\circ/\text{s}$) 为

$$\boldsymbol{\omega}_i = [-0.1 \quad 0.2 \quad -0.1]^T \quad (53)$$

卫星目标姿态四元数为

$$\boldsymbol{q}_f = [\cos(\pi/8) \quad 0 \quad \sin(\pi/8) \quad 0]^T \quad (54)$$

对应的旋转欧拉角为

$$\theta = 45^\circ, \varphi = \psi = 0^\circ \quad (55)$$

目标角速度 ($^\circ/\text{s}$) 为

$$\boldsymbol{\omega}_f = [0.1 \quad -0.2 \quad 0.1]^T \quad (56)$$

约束条件: 三轴最大角速度小于 $0.8 (^\circ/\text{s})$, 角加速度小于 $0.4 (^\circ/\text{s}^2)$ 。

机动时间设置为 100 s, 仿真结果如图 4~图 8 所示。其中, 图 4 为规划的姿态四元数按照偏航-滚动-俯仰的转序得到的姿态欧拉角, 与四元数相比, 欧拉角的结果可以更直观地展示机动过程中的卫星姿态变化。

图 5 为整个机动过程中卫星规划姿态与最终的目标姿态之间的误差, 该误差在机动结束时收敛至 0, 表明规划结果满足目标姿态的约束。

图 6 为规划的角速度, 其初始值与终端值均满足规划初末约束的要求。图 7 为规划的卫星角加速度。图 8 为根据该角加速度通过卫星动力学得到的卫星控制力矩, 可以作为姿态控制器的前馈力矩, 提高跟踪控制的精度, 减少姿态机动到位时的控制误差。

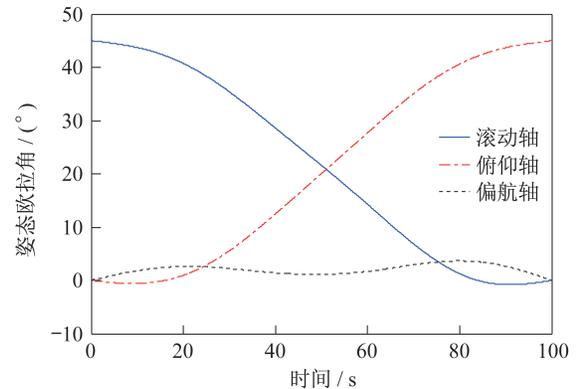


图 4 姿态规划曲线

Fig.4 Attitude programming curves

通过仿真曲线可以看出, 规划算法可以使卫星机动到目标姿态的同时, 使角速度也到达目标角速度。由于在根据角加速度约束选取 a_{\max} 时考虑了一定的裕量, 所以规划的角加速度并没有达到约束的上限。卫星姿态和角速度曲线形状类似于传统的时间最优 bang-bang 控制。由于对力矩进行了正弦

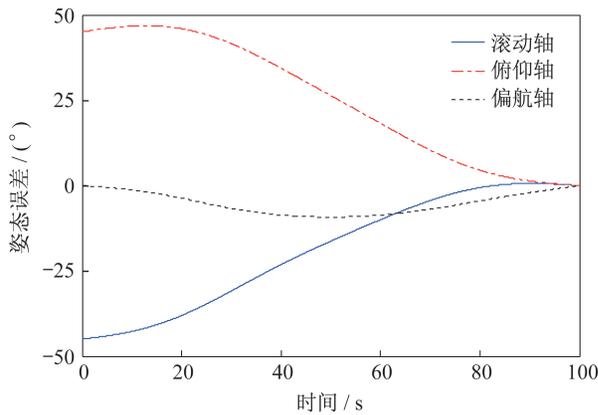


图 5 相对于目标姿态的误差曲线

Fig.5 Error curves relative to the target attitude

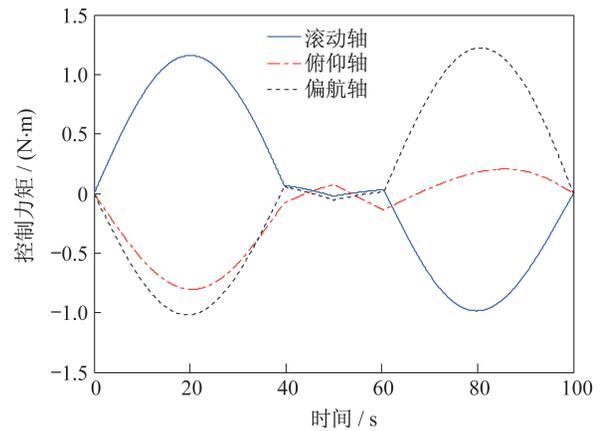


图 8 前馈力矩曲线

Fig.8 Feedforward torque curves

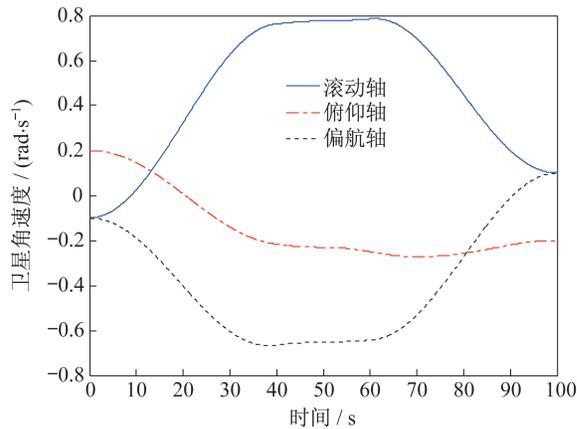


图 6 角速度规划曲线

Fig.6 Angular velocity programming curves

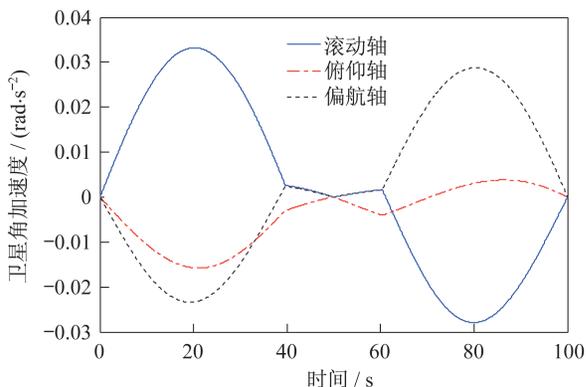


图 7 角加速度规划曲线

Fig.7 Angular acceleration programming curves

化处理,所以姿态和角速度曲线均为光滑且一阶可导,并且机动初始和末尾的角加速度均为0,可以保证卫星机动过程的平稳过渡,这在一定程度上防止过度激发卫星挠性振动,符合实际应用的需求。

4 结束语

本文给出了一种初末角速度不为零的卫星姿态机动规划方法。该方法利用四元数的性质将卫星三维方向上的姿态机动分解为多个一维方向上的机动,使得原来难以求解的非线性求解问题转换为多个一维空间上的线性规划问题,再将各个线性规划的结果通过简单的四元数运算合成为最终的姿态机动路径。在给定约束条件的情况下,该方法以解析函数的形式给出规划结果,不需要经过复杂的迭代运算,计算量很小,在现有的星上计算机运算能力和资源下可以做到实时的姿态机动规划,解决了过去针对此类问题所采用的非线性规划算法计算量过大、无法在轨实时计算、难以实际应用的问题,拓展了卫星在轨机动任务的设计空间,具有较强的实际应用价值。文章最后通过数学仿真验证了该规划算法的有效性。

参考文献

- [1] 章仁为. 卫星轨道姿态动力学与控制[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1998: 293.
- [2] BILIMORIA K D, WIE B. Time-optimal three-axis reorientation of a rigid spacecraft [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1993, 16 (3) : 446-452.
- [3] SHEN H J, TSIOTRAS P. Numerical approach for solving rigid spacecraft minimum time attitude maneuvers [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1990, 13(1): 38-45.
- [4] BYERS R M, VADALI S R. Quasi-closed form solution to the time-optimal rigid spacecraft

- reorientation problem [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1993, 16(3):453-461.
- [5] FRAZZOLI E, DAHLEH M A, FERON E. A randomized attitude slew planning algorithm for autonomous spacecraft [C]// *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit Montreal*. 2001:4155.
- [6] BAI X L, JUNKINS J L. New results for time-optimal three-axis reorientation of a rigid spacecraft [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2009, 32(4):1071-1076.
- [7] KIM Y, MESBAHI M. Quadratically constrained attitude control via semidefinite programming [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(5):731-735.
- [8] ROSS I M, FAHROO F. Pseudospectral knotting methods for solving optimal control problems [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, 27(3):397-405.
- [9] 刘刚,李传江,马广富,等.应用 SGCMG 的卫星姿态快速机动控制[J].*航空学报*,2011,32(10):1905-1913.
- [10] KARPENKO M, BHATT S, BEDROSSIAN N, et al. First flight results on time-optimal spacecraft slews [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012, 35(2):367-376.
- [11] 丰志伟,张永合,刘志超,等.基于路径规划的敏捷卫星姿态机动反馈控制方法[J].*国防科技大学学报*,2013,35(4):1-6.
- [12] 刘成国,余翔,刘昆,等.微小型飞行器姿态快速机动控制方法[J].*国防科技大学学报*,2018,40(3):42-48.
- [13] 冯逸骏,陈万春,杨良.线性伪谱模型预测能量最优姿态机动控制方法[J].*北京航空航天大学学报*,2018,44(10):2165-2175.
- [14] KANG W, BEDROSSIAN N. Pseudospectral optimal control theory makes debut flight, saves NASA \$1M in under three hours[EB/OL].(2007-09-24)[2019-07-01]. <https://archive.siam.org/pdf/news/1196.pdf>.
- [15] KARPENKO M, BHATT S, BEDROSSIAN N, et al. First flight results on time-optimal spacecraft slews [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012, 35(2):367-376.
- [16] OH H S, YOON Y D, CHANG Y K, et al. Near-eigenaxis rotation control law design for moving-to-rest maneuver [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2001, 24(6):1228-1231.

(上接第 24 页)

- [5] OSBORN M, CLAUSS C, GORIN B, et al. Microsatellite technology experiment MiTeX upper stage propulsion system development [C]// *43rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*. Reston, USA: AIAA Press, 2007: 1-8.
- [6] 侯增祺,胡金刚.航天器热控制技术:原理及其应用[M].北京:中国科学技术出版社,2007:114-115.
- [7] 张明,曾毅,刘奕宏,等.一种直接入轨卫星变轨阶段的供电方案[J].*航天器工程*,2014,23(1):63-68.
- [8] 房建成,宁晓琳,马辛,等.深空探测器自主天文导航技术综述[J].*飞控与探测*,2018,1(1):1-15.
- [9] 阎浩,张镜洋,陶晶亮,等.小卫星瞬态外热流下动态传热特性分析[J].*上海航天*,2019,36(3):124-129.
- [10] 李万林,张桂兰.航天器在上升段的空间辐射外热流计算[J].*中国空间科学技术*,1984,4(2):17-21.
- [11] 周连生.飞行器发射与转移段瞬态热分析[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2012.
- [12] MAKIHTO O.火箭整流罩的热设计[J].*导弹与航天运载技术*,1991(6):1-8.
- [13] 苗建印,钟奇,赵啟伟,等.航天器热控制技术[M].北京:北京理工大学出版社,2018:5,21-22.
- [14] NIITSU M, YASUI M, SHIMURA K, et al. H-IIA launch vehicle upgrade development-upper stage enhancement to extend the lifetime of satellites [J]. *Mitsubishi Heavy Industries Technical Review*, 2014, 51(4): 26-32.
- [15] 闵桂荣.卫星热控制技术[M].北京:宇航出版社,1991:89-91.
- [16] GILMORE D G. *Spacecraft thermal control handbook: volume I fundamental technologies* [M]. El Segundo, CA: The Aerospace Corporation Press, 2002: 537-552.
- [17] 麻慧涛,华诚生.通信卫星平台热分析建模方法研究及温度预示[J].*航天器工程*,2002,11(5):54-60.
- [18] 吴永康,胡雄超,毛晓楠,等.高精度星敏感器热设计研究及仿真验证[J].*上海航天*,2018,35(5):123-129.