

# 基于落角约束的最优导引律

田江桥<sup>1</sup>, 郑国栋<sup>1</sup>, 方东洋<sup>2</sup>, 李绍隆<sup>2</sup>, 陈俊伟<sup>2</sup>

(1. 南京理工大学自动化学院, 江苏南京 210094; 2. 上海机电工程研究所, 上海 201109)

**摘要:** 在对地精确制导武器的实际使用中, 不仅要求脱靶量最小, 而且希望能以一定的落角命中目标, 从而可以充分发挥战斗部效能, 取得最佳毁伤效果。传统的比例导引律不能满足该要求, 为此本文建立了含有落角约束的最优控制模型, 并依据施瓦兹不等式原理进行了推导, 最终得到了含有落角约束的最优导引律的表达形式。仿真结果表明: 该导引律可以使导弹以期望的落角命中目标, 且具有实现简单、结果最优等特点。

**关键词:** 落角约束; 最优导引律; 比例导引

**中图分类号:** V 19      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.19328/j.cnki.1006-1630.2020.04.014

## Optimal Guidance Law based on Terminal Angular Constraint

TIAN Jiangqiao<sup>1</sup>, ZHENG Guodong<sup>1</sup>, FANG Dongyang<sup>2</sup>, LI Shaolong<sup>2</sup>, CHEN Junwei<sup>2</sup>

(1. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, Jiangsu, China;

2. Shanghai Electro-Mechanical Engineering Institute, Shanghai 201109, China)

**Abstract:** In practical applications of ground precise-guidance weapons, not only the miss distance is required to be the minimum, but also the target is expected to be hit at a certain strike angle, so that the warhead effectiveness can be brought into full play and the best lethality can be achieved. The traditional proportional guidance law cannot meet these requirements. Therefore, in this paper, an optimal control model with terminal angular constraint is established, and the expression of the optimal guidance law with terminal angular constraint is derived according to the Schwartz inequality principle. The simulation results show that the guidance law can enable missile to hit the target at the desired strike angle and has the characteristics such as simple realization and optimal results.

**Key words:** terminal angular constraint; optimal guidance law; proportional guidance

## 0 引言

随着目标威胁的发展, 在命中一些较难摧毁的目标时, 导弹的毁伤效果不但与导弹的制导精度有关, 而且还与导弹命中时刻的落角有关<sup>[1-5]</sup>。如反导希望能够对来袭导弹直接碰撞, 反坦克导弹希望能够以较大的落角命中薄弱的顶装甲等。在这些情况下对制导律的要求为: 既要满足零脱靶量, 又要满足期望的末端落角。传统的比例导引律虽然原理简单、容易实现, 但无法对末端落角进行约束, 需要更有效的导引律来满足以上需求。文献[6]基于简单的导弹运动模型, 利用拉格朗日方法推导了一种同时带有落点和落角约束的水平攻坚最优制导

律, 适用于水平攻坚弹道。文献[7-9]设计了一种基于滑模控制的带落角度约束制导律, 并设计了一种消除滑模抖振的方法, 但表达形式较为复杂。

## 1 弹目相对运动数学模型

弹目相对运动的几何关系如图 1 所示。图中,  $V_m$  为导弹的速度矢量,  $V_t$  为目标的速度矢量,  $n_c$  为导弹的机动过载,  $n_T$  为目标的机动过载,  $y$  为弹目距离在高低方向的投影,  $R$  为弹目相对距离,  $q$  为弹目视线角,  $q$  在命中时刻可以认为是导弹的落角<sup>[10]</sup>。

依据图 1 可以得到使用状态空间的方法表示的弹目相对运动的数学模型:

收稿日期: 2020-03-01; 修回日期: 2020-06-26

作者简介: 田江桥(1975—), 男, 研究员, 主要研究方向为飞行器自动控制、导航、制导与控制。

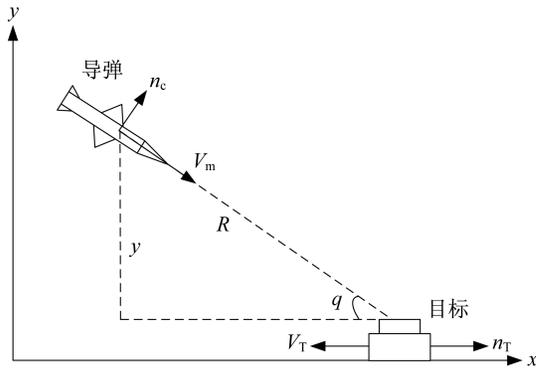


图 1 导弹和目标相对运动平面

Fig.1 Schematic diagram of the relative motion of missile and target

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dot{y} \\ n_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ n_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} n_c \quad (1)$$

式中:  $n_T$  为目标机动过载;  $n_c$  为导弹过载指令;  $y$  为弹目相对运动速度在高低方向上的投影;  $\dot{y}$  为弹目距离在高低方向上的投影, 在工程应用中, 在命中时刻  $y$  的值可近似认为是脱靶量<sup>[11-12]</sup>。

## 2 含有落角约束的最优制导律设计

导弹落角约束的最优控制问题为对导弹以特定的速度指向命中目标同时消耗最小的能量, 所述求解该问题的方法为利用施瓦兹不等式方法推导出所述最优控制问题的解, 即得到导弹过载指令、预估命中时间以及弹目相对速度的关系表达式。在整个飞行过程中, 导弹过载指令  $n_c$  的积分最小, 同时在命中时刻导弹的脱靶量为 0。而对于落角约束的制导律, 除了上述要求之外, 还要求导弹按特定的落角命中目标。需要说明的是, 在求解该问题的方法中, 通过指定弹目相对运动速度的大小, 可以间接实现对导弹落角进行约束的目的。在数学上, 以上最优控制问题可以描述如下:

$$\begin{aligned} y(t_F) &= 0 \\ \dot{y}(t_F) &= \dot{y}_F \\ \min \int_0^{t_F} n_c^2(t) dt \end{aligned} \quad (2)$$

式中:  $t_F$  为命中时刻;  $y(t_F)$  为命中时刻的脱靶量;  $\dot{y}(t_F)$  为命中时刻的弹目运动速度在  $y$  方向上的投

影;  $\min \int_0^{t_F} n_c^2(t) dt$  为整个飞行过程中导弹过载指令平方的积分最小。

对于式(1)的状态方程, 令

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ n_T \end{bmatrix}^T \\ F &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ G &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

$$u = n_c$$

则在命中时刻状态方程的解为

$$\begin{aligned} x(t_F) &= \Phi(t_F - t)x(t) + \\ &\int_t^{t_F} \Phi(t_F - \lambda)G(\lambda)u(\lambda)d\lambda \end{aligned} \quad (4)$$

其中,

$$\Phi(t) = L^{-1}[(sI - F)^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & t & 0.5t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

将式(5)代入式(4)中, 经过代数运算, 可以得到  $y(t_F)$  和  $\dot{y}(t_F)$  的表达式如下:

$$\begin{aligned} y(t_F) &= y(t) + (t_F - t)\dot{y}(t) + 0.5(t_F - t)^2 n_T(t) - \\ &\int_t^{t_F} (t_F - \lambda)n_c(\lambda)d\lambda \end{aligned} \quad (6)$$

$$\dot{y}(t_F) = \dot{y}(t) + (t_F - t)n_T(t) - \int_t^{t_F} n_c(\lambda)d\lambda \quad (7)$$

令

$$f_1 = y(t) + (t_F - t)\dot{y}(t) + 0.5(t_F - t)^2 n_T(t) \quad (8)$$

$$f_2^* = \dot{y}(t) + (t_F - t)n_T(t) \quad (9)$$

$$h_1(\lambda) = t_F - \lambda \quad (10)$$

$$h_2(\lambda) = 1 \quad (11)$$

将式(8)~式(11)代入式(6)和式(7)得

$$y(t_F) = f_1 - \int_t^{t_F} h_1(\lambda)n_c(\lambda)d\lambda \quad (12)$$

$$\dot{y}(t_F) = f_2^* - \int_t^{t_F} h_2(\lambda)n_c(\lambda)d\lambda \quad (13)$$

对式(13)求偏导, 并合并式(12)和式(13)得到

$$f_1 - \delta f_2 = \int_t^{t_F} [h_1(\lambda) - \delta h_2(\lambda)]n_c(\lambda)d\lambda \quad (14)$$

将式(14)应用施瓦兹不等式, 则可以得到

$$z = \int_t^{t_F} n_c^2(\lambda)d\lambda \geq \frac{(f_1 - \delta f_2)^2}{\int_t^{t_F} [h_1(\lambda) - \delta h_2(\lambda)]^2 d\lambda} \quad (15)$$

依据施瓦兹不等式原理,当

$$n_c(\lambda) = K[h_1(\lambda) - \delta h_2(\lambda)], K \text{ 为常数} \quad (16)$$

令

$$\|h_1^2\| = \int_t^{t_F} h_1^2(\lambda) d\lambda \quad (17)$$

$$\frac{dz}{d\delta} = 0 = \frac{[\|h_1^2\| - 2\delta\|h_1 h_2\| + \delta^2\|h_2^2\|]2(f_1 - \delta f_2)(-f_2) - (f_1 - \delta f_2)^2[-2\|h_1 h_2\| + 2\delta\|h_2^2\|]}{[\|h_1^2\| - 2\delta\|h_1 h_2\| + \delta\|h_2^2\|]^2} \quad (20)$$

根据式(20),可以得到

$$\delta = \frac{f_1\|h_1 h_2\| - f_2\|h_1^2\|}{f_1\|h_2^2\| - f_2\|h_1 h_2\|} \quad (21)$$

联立式(12)、式(16)和式(21)可以得到  $K$  的表达式:

$$n_c(t) = \frac{f_1 h_1(t)\|h_2^2\| - \|h_1 h_2\|[f_2 h_1(t) + f_1 h_2(t) + f_2 h_2(t)]\|h_1^2\|}{\|h_1^2\|\|h_2^2\| - \|h_1 h_2\|^2} \quad (23)$$

令  $t_{go} = t_F - t$  表示剩余飞行时间,那么式(8)~式(11)可以分别表示为如下形式:

$$f_1 = y(t) + (t_F - t)\dot{y}(t) + 0.5(t_F - t)^2 \ddot{y}(t) = y + t_{go}\dot{y} + 0.5t_{go}^2 \ddot{y} \quad (24)$$

$$f_2 = f_2^* - \dot{y}(t_F) = \dot{y} + t_{go}\ddot{y} - \dot{y}(t_F) \quad (25)$$

$$h_1(t) = t_F - t \quad (26)$$

$$h_2(t) = 1 \quad (27)$$

将式(24)~式(27)代入式(17)~式(19),得

$$\|h_1^2\| = \int_t^{t_F} h_1^2(\lambda) d\lambda = \frac{t_{go}^2}{3} \quad (28)$$

$$\|h_2^2\| = \int_t^{t_F} h_2^2(\lambda) d\lambda = t_{go} \quad (29)$$

$$\|h_1 h_2\| = \int_t^{t_F} h_1(\lambda) h_2(\lambda) d\lambda = \frac{t_{go}^2}{2} \quad (30)$$

将式(24)~式(30)代入式(23),得

$$n_c(t) = \frac{6y + 4\dot{y}t_{go} + n_T t_{go}^2 + 2\dot{y}(t_F)t_{go}}{t_{go}^2} \quad (31)$$

重写式(31)如下:

$$n_c(t) = \frac{4(y + \dot{y}t_{go}) + 2(y + \dot{y}(t_F)t_{go}) + n_T t_{go}^2}{t_{go}^2} \quad (32)$$

根据弹目运动的几何关系可以得到

$$q = \frac{y}{R} = \frac{y}{V_c t_{go}} \quad (33)$$

$$\dot{q} = \frac{y + \dot{y}t_{go}}{V_c t_{go}^2} \quad (34)$$

$$\|h_2^2\| = \int_t^{t_F} h_2^2(\lambda) d\lambda \quad (18)$$

$$\|h_1 h_2\| = \int_t^{t_F} h_1(\lambda) h_2(\lambda) d\lambda \quad (19)$$

对式(15)中的  $z$  的表达式求  $\delta$  的偏导数并令其为 0,此时  $z$  取极小值,并根据式(16)~式(19)得到

$$K = \frac{f_1}{\|h_2^2\| - \delta\|h_1 h_2\|} \quad (22)$$

将  $K$  代入式(16)就可以得到导弹过载指令  $n_c$  的表达式:

$$\dot{y} = \frac{\dot{q} V_c t_{go}^2 - y}{t_{go}} = \frac{\dot{q} V_c t_{go}^2 - \dot{q} V_c t_{go}}{t_{go}} = \dot{q} V_c t_{go} - q V_c \quad (35)$$

式中: $R$ 为弹目相对距离; $V_c$ 为弹目相对运动速度; $q$ 为视线角; $\dot{q}$ 为视线角速度。

当在命中时刻,  $t = t_F, t_{go} = 0$ ,则有

$$\dot{y}(t_F) = q(t_F)V_c = q_F V_c \quad (36)$$

式中: $q(t_F) = q_F$ ,是命中时刻的视线角,即导弹的落角。

联立式(32)~式(34)可以得到导弹过载指令  $n_c$  的表达式:

$$n_c(t) = 4V_c \dot{q} + \frac{2[qV_c + \dot{y}(t_F)]}{t_{go}} + n_T \quad (37)$$

将式(36)代入式(37)得到导弹过载指令、导弹过载指令、预估命中时间以及弹目相对速度的关系表达式:

$$n_c(t) = 4V_c \dot{q} + \frac{2V_c[q - q_F]}{t_{go}} + n_T \quad (38)$$

式中: $q_F$ 为落角; $n_T$ 为目标的机动过载。

至此,该最优控制问题求解完毕。从式(38)可以看出,基于落角约束的制导律与扩展比例导引律(APN)相似,但是多出了与实际视线角和末端指定视线角之差的相关项  $\frac{2V_c[q - q_F]}{t_{go}}$ 。通过式(38)计算得到的导弹过载指令  $n_c$ ,最终保证导弹的末端脱靶量为 0,整个飞行过程的积分最小,并且按照指定

的落角  $q_F$  命中目标。

如忽略目标机动,即令  $n_T=0$ ,则基于落角约束的导引律的导弹过载指令  $n_c(t)$  具有如下简化形式:

$$n_c(t) = 4V_c \dot{q} + \frac{2V_c[q - q_F]}{t_{go}} \quad (39)$$

对于采用主动雷达寻的具体实施方法包含以下步骤,具体如图 2 所示。

**步骤 1** 获取视线角速度  $\dot{q}$  和弹目相对速度  $V_c$ : 这两个量可以通过采用脉冲多普勒体制的主动或者半主动雷达导引头直接测量得到。

**步骤 2** 获取预估剩余飞行时间  $t_{go}$ : 首先通过

弹上计算机惯导解算得到的导弹和目标的相对距离  $R$ , 然后除以弹目相对速度  $V_c$  得到剩余飞行时间  $t_{go}$ 。

**步骤 3** 获取当前视线角  $q$  和落角  $q_F$ : 当前视线角  $q$  可以通过导引头测量得到, 而落角  $q_F$  则可以在发射前通过发控设备直接给导弹装订。

**步骤 4** 弹上计算机在得到以上参数后, 运行式 (39), 得到过载指令  $n_c(t)$ , 然后送给自动驾驶仪, 自动驾驶仪执行  $n_c(t)$ , 操纵导弹按照落角约束导引律飞向目标。最终脱靶量为 0, 整个飞行过程中过载积分最小, 并且在命中时刻  $q = q_F$ 。

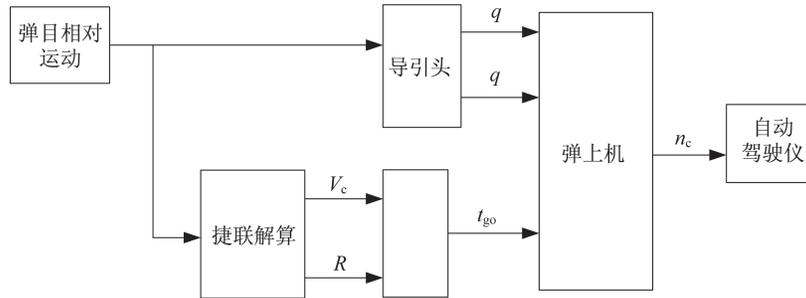


图 2 基于落角约束的导引律实现框图

Fig.2 Block diagram of the guidance law based on terminal angular constraint

### 3 数字仿真

以一个攻击地面运动目标的典型应用为例进行仿真验证。在该例中, 导弹速度为 800 m/s, 地面目标运动速度 20 m/s, 导弹飞行时间为  $T_F=20$  s, 末端弹目视线角要求为  $q_F=-75^\circ$ 。仿真结果如图 3 和图 4 所示。

由图 3 和图 4 可见, 基于落角约束的导引律飞

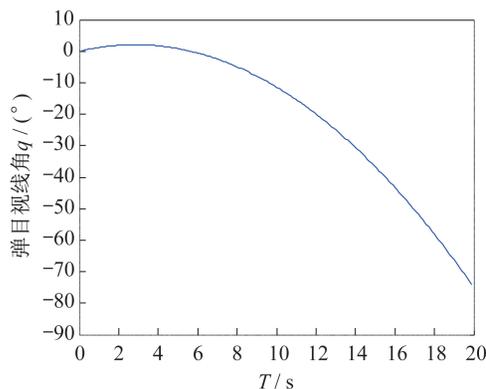


图 3 末制导过程中的弹目视线角曲线

Fig.3 Target-missile line-of-sight angle curve in terminal guidance

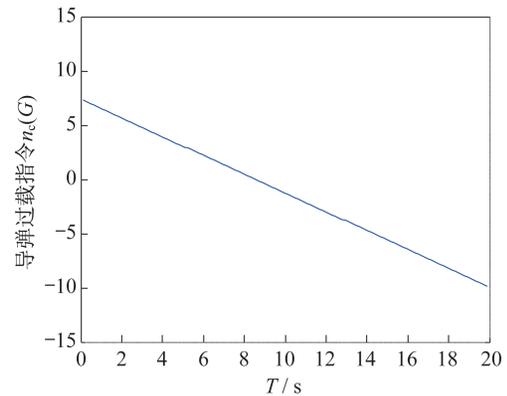


图 4 末制导过程中的导弹过载曲线

Fig.4 Missile overload curve in terminal guidance

行的弹目视线角在命中时刻满足落角要求, 过载指令在导弹能力范围内, 验证了该导引律的有效性。

### 4 结束语

本文建立了含有落角约束的最优控制问题, 并依据施瓦兹不等式原理进行了推导, 最终得到了含

(下转第 116 页)