

# 基于 ZAM-GTFR 和 Hough Transform 的 LFM 信号检测

曾小东, 张 薇, 曾德国, 祝 俊

(电子科技大学 电子工程学院, 四川 成都 611731)

**摘 要:** 对于诸如电子对抗、电子情报等领域, 噪声环境下的未知参量信号检测是一个关键问题。本文提出了 ZAM-GTFR 结合霍夫变换对线性调频信号的一种新的检测方法。对于特定的复高斯白噪声环境下的线性调频信号, 检测的过程等效于对 ZAM-GTFR 沿瞬时频率直线作积分, 再用积分值与门限做比较。仿真结果证实了此检测方法的有效性。

**关键词:** 信号检测; ZAM-GTFR; 霍夫变换

**中图分类号:** TN 971 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.19328/j.cnki.1006-1630.2020.06.017

## Linear Frequency Modulation Signal Detection Based on ZAM-GTFR and Hough Transform

ZENG Xiaodong, ZHANG Wei, ZENG Deguo, ZHU Jun

(School of Electronics Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, Sichuan, China)

**Abstract:** The detection of unknown parameter signals in a noisy environment is a critical issue in many areas such as electronic counter measures and electronic intelligence. In this paper, a novel detection scheme based on the generalized time-frequency representation of Zhao, Atlas, and Marks (ZAM-GTFR) and Hough transform is proposed. For the linear frequency modulation signals in a specific complex white Gaussian noise environment, the detection process is equivalent to integrating ZAM-GTFR along a straight line of instantaneous frequency, and then comparing the integrated value with the threshold. The simulation results show the effectiveness of the proposed detection method.

**Key words:** signal detection; ZAM-GTFR; Hough transform

## 0 引言

目前, 低截获概率信号已经广泛应用于各种新体制雷达中, 比较典型的如线性调频 (Linear Frequency Modulation, LFM) 信号。LFM 信号具有很好的隐蔽性和抗干扰性, 使得传统的基于功率峰值检测的雷达侦察设备很难完成对其的截获, 需要研究新的检测方法来突破 LFM 信号的低截获性。为此, 近年来国内外众多学者针对 LFM 信号的检测问题提出了许多新的处理方法。其中, 比较典型的如 BARBAROSSA<sup>[1]</sup>、孙晓昶等<sup>[2]</sup>、刘建成等<sup>[3]</sup>利用

Wigner-Hough 变换 (Wigner-Hough Transform, WHT) 对 LFM 信号进行检测, 并分析了检测性能, 对于多分量情况 Wigner 的交叉项非常严重, 导致 Hough 变换无法正确提取时频的直线, 故对多分量的检测性能不佳。KAY 等<sup>[4]</sup>、WOOD 等<sup>[5]</sup>、冉鑫等<sup>[6]</sup>使用 Radon-Wigner 变换 (Radon-Wigner Transform, RWT) 分析了 LFM 的检测, 与 WHT 一样存在交叉项问题; WANG 等<sup>[7]</sup>、JENNISON 等<sup>[8]</sup>、刘爱芳等<sup>[9]</sup>基于 Radon-Ambiguity 变换 (Radon-Ambiguity Transform, RAT) 同样完成了 LFM 信号检测和参数估计,

收稿日期: 2019-09-08; 修回日期: 2020-02-04

作者简介: 曾小东 (1985—), 男, 硕士, 主要研究方向为信号检测、参数估计与识别。

但由于 Ambiguity 变换的时频聚集性有限, LFM 的检测概率受到一定影响。其他的方法还有基于 Fractional Fourier Transform (FFT)<sup>[10-12]</sup> 和匹配傅里叶变换 (Matched Fourier Transform, MFT)、多通道数字去斜和多通道自相关<sup>[13]</sup> 等 LFM 信号检测方法。

可以看出, LFM 信号的检测广泛地运用了时频分析的方法, ZAM-GTFR 作为一种典型的时频分布, 具有诸多优点, 如同时具备高的时间、频率分辨率, 时域上维持了有限时间支撑, 频域上加强了谱峰, 且具备抑制交叉项的能力<sup>[14-15]</sup>。经过推导分析发现, ZAM-GTFR 对 LFM 的调频斜率有极强的感知能力, 能够用来分析 LFM 信号的检测等问题。所以, 本文综合前人的研究成果, 针对 LFM 的检测问题, 提出了将 ZAM-GTFR 和 Hough 变换 (Hough Transform, HT) 相结合的方法, 利用 LFM 信号在 ZAM-GTFR 变换后能够获得二维时间-频率分布的能量聚集特性, 再进行 HT 提取二维平面的瞬时频率直线特征, 得到脉冲尖峰。通过仿真能够看出, 在较低的信噪比下该方法仍然具有良好的检测性能。

## 1 问题描述

考虑高斯白噪声中, 未知参量信号的检测问题, 特别地, 考虑观测时间为  $(-T/2, T/2)$  的接收信号  $r(t)$ 。二元假设为

$$\begin{aligned} H_0: r(t) &= w(t) \\ H_1: r(t) &= x(t; \theta) + w(t) \end{aligned} \quad (1)$$

式中:  $w(t)$  为零均值复高斯白噪声, 即  $w(t) = w_R(t) + jw_I(t)$ , 其中,  $w_R(t)$ 、 $w_I(t)$  为相互独立的零均值实高斯白噪声, 功率谱密度均为  $P_w(f) = N_0/2$ ;  $x(t; \theta)$  为参量  $\theta$  未知的复确定信号。

## 2 LFM 检测

对于大量的存储数据情况, 广义似然比检测系统 (Generalized Likelihood Ratio Test, GLRT) 是最佳的检测系统, 不同的判决准则只影响门限值  $\gamma$  的大小。因此, 可得出如下检测准则:

$$\Lambda(r, \hat{\theta}) = \frac{p(r(t); \hat{\theta}|H_1)}{p(r(t)|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \gamma \quad (2)$$

式中:  $p(r(t); \hat{\theta}|H_1)$  为  $H_1$  假设下,  $r(t)$  的概率密度函数 (Probability Distribution Function, PDF), 与未知的信号参量  $\theta$  有关;  $p(r(t)|H_0)$  为  $H_0$  下的 PDF;  $\hat{\theta}$  为假设  $H_1$  成立情况下,  $\theta$  的最大似然估计 (Maximum

Likelihood Estimation, MLE);  $\gamma$  为似然比门限。

文献[4]利用 RWT 分析了 LFM 信号的检测问题。同样地, ZAM-GTFR 作为另一种 Cohen 类时频分布, 具备锥形核, 可在一定程度上解决 Wigner-Ville 分布 (Wigner-Ville Distribution, WVD) 的交叉项问题, 所以 ZAM-GTFR 也可用于 LFM 信号检测且多分量情况下的检测性能更佳。详细的推导如下:

首先, WVD 的定义为

$$W_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} A_w(t, \tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3)$$

式中:  $A_w(t, \tau) = x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$ ;  $x(t)$  为源信号;  $x^*(t)$  为源信号的共轭。

对于 LFM 信号

$$x(t, \theta) = \exp[j2\pi(f_c t + 0.5kt^2 + \varphi_0)] \quad (4)$$

式中: 瞬时频率未知;  $\theta = [f_c, k, \varphi_0]^T$  包含了信号的未知参数;  $f_c$  为起始频率;  $k$  为调频斜率;  $\varphi_0$  为初相。

当观测时间  $T \rightarrow \infty$  时,

$$A_w(t, \tau) = e^{j2\pi\tau(f_c + k\tau)} \quad (5)$$

与初相  $\varphi_0$  无关。

$$W_x(t, f) = \delta[f - (f_c + kt)] \quad (6)$$

式中:  $\delta[\cdot]$  为狄拉克函数;  $f$  为频率。

ZAM-GTFR 的定义为

$$\begin{aligned} Z_x(t, f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{t-|t|/2}^{t+|t|/2} g(\tau) x\left(s + \frac{\tau}{2}\right) x^* \\ &\left(s - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} ds d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) A_z(t, \tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \end{aligned} \quad (7)$$

式中:  $A_z(t, \tau)$  为时间  $t$  的局部相关函数;  $g(\tau)$  为加权函数。同样道理, 对于 LFM

$$\begin{aligned} A_z(t, \tau) &= \int_{t-|t|/2}^{t+|t|/2} x\left(s + \tau/2\right) x^*\left(s - \tau/2\right) ds = \\ &\int_{t-|t|/2}^{t+|t|/2} e^{j(2\pi f_c \tau + 2\pi k\tau s)} ds = \\ &\frac{e^{j2\pi\tau(f_c + k\tau)} \sin(\pi k\tau | \tau |)}{\pi k\tau} \end{aligned} \quad (8)$$

从式(8)可以看出, ZAM-GTFR 也与 LFM 初相  $\varphi_0$  无关。并且对比式(5)与式(8), 我们发现, 对于 LFM 信号, ZAM-GTFR 相当于在 WVD 的基础上,

作了一个加窗处理。其中,窗函数为

$$U(\tau) = \frac{\sin(\pi k\tau|\tau|)}{\pi k\tau} \quad (9)$$

在频率域起到了平滑作用,可以在时频平面对频率方向的交叉项起到抑制的作用,所以 ZAM-GTFR 在一定程度上克服了 WVD 易受时频平面交叉项影响的缺点,特别是当处理数据量较大(多个调频时宽)时,优势可能更明显,特别适合多分量 LFM 的信号处理。为了简化推导,假设加权函数  $g(\tau) = 1$ , 则

$$\begin{aligned} Z_x(t, f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j2\pi\tau(f_c + kt)} \sin(\pi k\tau|\tau|)}{\pi k\tau} e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\ &\delta[f - (f_c + kt)] \otimes R(f) = \\ &R[f - (f_c + kt)] \end{aligned} \quad (10)$$

其中,

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi k\tau|\tau|)}{\pi k\tau} e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\ &\frac{1}{2|k|} - \frac{2f^2}{k^2} {}_2F_3(a_1, a_2; b_1, b_2, b_3; z) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} {}_2F_3(a_1, a_2; b_1, b_2, b_3; z) &= \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n}{(b_1)_n (b_2)_n (b_3)_n} \frac{z^n}{n!} \end{aligned} \quad (12)$$

是广义超几何函数  $(\lambda)_n = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n-1)$ ,  $(\lambda)_0 = 1$ ,  $a_1 = 1/2$ ,  $a_2 = 1$ ,  $b_1 = 3/4$ ,  $b_2 = 5/4$ ,  $b_3 = 3/2$ ,  $z = -(\pi^2 f^4)/(4k^2)^{[16]}$ 。

根据文献[4],有如下的 GLRT 检测准则:

$$l_w = \max_{f_c, k} \int_{-\infty}^{+\infty} W_\tau(t, f_c + kt) dt > \eta_w \quad (13)$$

受  $\frac{\sin(\pi k\tau|\tau|)}{\pi k\tau}$  的影响,  $Z_x(t, f)$  并不像  $W_x(t, f)$

出现尖锐的冲击性,而是出现纹状衰减,但极大值仍位于  $f = 0$  处。故依照式(13)的准则,我们有

$$l_z = \max_{f_c, k} \int_{-\infty}^{+\infty} Z_\tau(t, f_c + kt) dt > \eta_z \quad (14)$$

所以,由式(14)可知,对于 LFM 信号的检测,可以分为以下几个步骤:

**步骤 1** 对截获的信号计算其 ZAM-GTFR 分布;

**步骤 2** 沿 ZAM-GTFR 后时频平面上的所有直线做积分;

**步骤 3** 用最大的积分结果与指定的门限  $\eta_z$  做比较。若超过门限,则表明假设  $H_1$  成立,有信号存在。

对于步骤 2 的积分处理,有许多变换可以实现,如 Radon 变换、Hough 变换等。本文拟采用 Hough 变换,因为 Hough 变换可以将平面里的直线映射为另

一个二维平面的一个点,其实质是一个坐标变换,用一个新的 2-D 坐标系  $(\rho, \theta)$  替代原  $(t, f)$ 。具体的变换关系为

$$\rho = t \cos \theta + f \sin \theta \quad (15)$$

对式(15)稍加整理可得

$$\rho = \sqrt{t^2 + f^2} \sin\left(\theta + \arctan \frac{t}{f}\right) \quad (16)$$

对于  $(t, f)$  平面上的任意一点,  $t, f$  为某常数,  $(\rho, \theta)$  平面有一个与之对应的正弦曲线。一方面,如果在  $(t, f)$  上有一条直线,从该直线上的各点映射到  $(\rho, \theta)$  的各正弦曲线将如积分一般,相交于一点,假设映射过程保持强度不变,则将在  $(\rho, \theta)$  平面产生一个尖锐的峰值<sup>[17]</sup>;另一方面,随机噪声分布在整个平面上,因此,映射后的各正弦曲线不能相交形成一个尖峰。

### 3 性能分析

#### 3.1 交叉项与计算量分析

为了分析 ZAM-GTFR 时频分布的交叉项影响,常常以多分量音调信号

$$p(t) = e^{j2\pi f_1 t} + e^{j2\pi f_2 t} = x_1(t) + x_2(t) \quad (17)$$

为考察对象。其中,  $f_1, f_2$  为信号  $p(t)$  的两个不同载频。文献[17]指出,  $p(t)$  的 ZAM-GTFR 由信号项和交叉项组成:

$$Z_p(t, f) = Z_{xx}(t, f) + Z_{x_1 x_2}(t, f) + Z_{x_2 x_1}(t, f) \quad (18)$$

式中:信号项为

$$\begin{aligned} Z_{xx}(t, f) &= Z_{x_1 x_1}(t, f) + Z_{x_2 x_2}(t, f) = \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau| e^{j2\pi f_1 \tau} e^{-j2\pi f \tau} d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau| e^{j2\pi f_2 \tau} e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \\ &\delta(f - f_1) \otimes L(f) + \delta(f - f_2) \otimes L(f) = \\ &L(f - f_1) + L(f - f_2) \end{aligned} \quad (19)$$

式中:  $L(f)$  为  $|\tau|$  的傅里叶变换。

第 1 个交叉项为  $Z_{x_1 x_2}(t, f)$ , 因为

$$\begin{aligned} A_{x_1 x_2}(t, \tau) &= \int_{t-|\tau|/2}^{t+|\tau|/2} x_1(s + \tau/2) x_2^*(s - \tau/2) ds = \\ &\int_{t-|\tau|/2}^{t+|\tau|/2} e^{j2\pi f_1 (s + \tau/2)} e^{-j2\pi f_2 (s - \tau/2)} ds = \\ &\int_{t-|\tau|/2}^{t+|\tau|/2} e^{j2\pi (f_1 - f_2) s} e^{j2\pi (f_1 + f_2) \tau/2} ds = \\ &e^{j2\pi (f_1 + f_2) \tau/2} e^{j2\pi (f_1 - f_2) t} \frac{\sin[\pi (f_1 - f_2) |\tau|]}{\pi (f_1 - f_2)} \end{aligned} \quad (20)$$

则

$$\begin{aligned}
 Z_{x_1x_2}(t,f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{j2\pi(f_1+f_2)\tau/2} e^{j2\pi(f_1-f_2)t} \\
 &\frac{\sin[\pi(f_1-f_2)|\tau|]}{\pi(f_1-f_2)} e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\
 &e^{j2\pi(f_1-f_2)t} \delta[f - (f_1+f_2)/2] \otimes S(f) = \\
 &e^{j2\pi(f_1-f_2)t} S[f - (f_1+f_2)/2] \quad (21)
 \end{aligned}$$

式中: $S(f)$ 为辛格函数 $\frac{\sin[\pi(f_1-f_2)|\tau|]}{\pi(f_1-f_2)}$ 的傅里叶变换。

同理,第2个交叉项为 $Z_{x_2x_1}(t,f) = e^{j2\pi(f_2-f_1)t} S[f - (f_1+f_2)/2]$ 。由式(19)和式(21)可知,ZAM-GTFR在时频平面上很好地反映了信号瞬时频率的变换规律,能正确给出信号项和交叉项。

为了将本文算法应用于实际系统,考察ZAM-GTFR的计算量,假设 $L$ 为频率点数, $L=(M-1)/2$ , $M$ 为窗长。离散形式的ZAM-GTFR等效为离散傅里叶变换取实部,所以可由基-2的快速傅里叶变换(FFT)实现<sup>[14]</sup>。故计算一次ZAM-GTFR需要 $(L/2) \log_2 L$ 次复数乘法和 $L \log_2 L$ 次复数加法。

### 3.2 仿真结果

为了验证本文算法的有效性,做了如下的仿真。

**仿真1** 实验中,采样频率 $f_s$ 为200 MHz,信号持续时间为 $T=3 \mu s$ ,全频段信噪比为5 dB,LFM分量1的起始频率 $f_{c1}=10$  MHz,带宽 $B_1=10$  MHz,分量2的起始频率 $f_{c2}=15$  MHz,带宽 $B_2=20$  MHz。仿真结果如图1~图3所示。

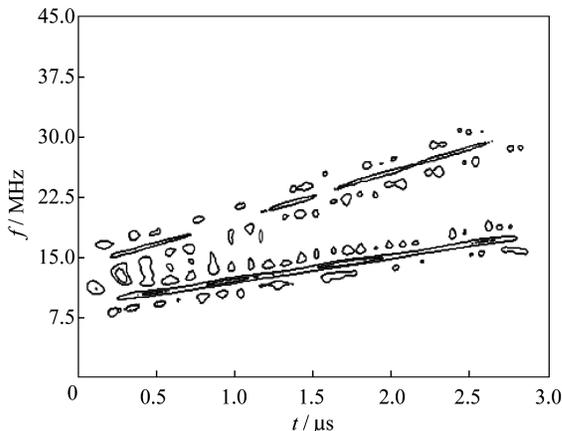


图1 加噪 LFM 的 ZAM-GTFR  
Fig.1 ZAM-GTFR of LFM with noise

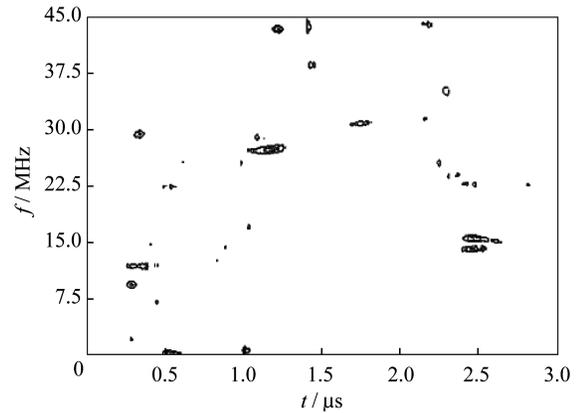


图2 高斯白噪声的 ZAM-GTFR  
Fig.2 ZAM-GTFR of Gaussian white noise

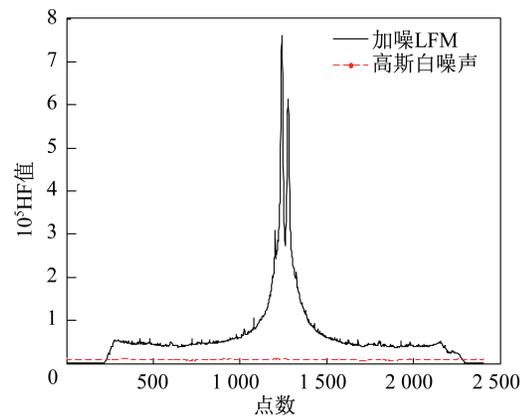


图3 信号 ZAM-GTFR 的 HF 值  
Fig.3 HF value of the signal ZAM-GTFR

**仿真2** 实验中,采样频率 $f_s$ 为200 MHz,信号持续时间为 $T=5.12 \mu s$ ,全频段信噪比为-5 dB到+5 dB,LFM的起始频率 $f_c=10$  MHz,带宽 $B=10$  MHz,与文献[1-3]提出的WHT和相关法做了对比分析。仿真结果如图4所示。

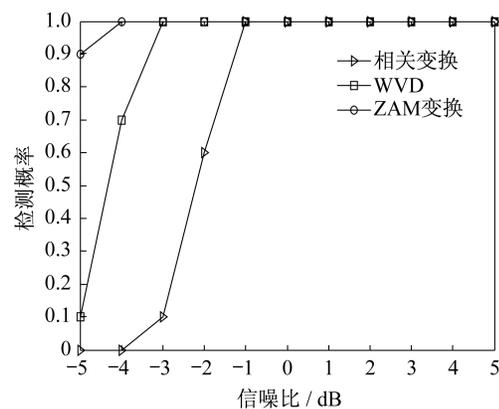


图4 LFM 的检测概率  
Fig.4 Detection probability of LFM

由图 1 和图 2 可知,ZAM-GTFR 很好地反映了 LFM 信号的瞬时频率信息,且对于多分量信号而言能有效抑制交叉项的影响。图 3 即进一步利用 HT 提取 LFM 信号 ZAM-GTFR 后的特征参数,可以看出在时频面上出现瞬时频率直线条件下,HT 变换后将对应出现一个明显的尖峰,且峰值的个数代表了 LFM 分量的个数。

由图 4 可知,在相同的检测准则下,由于 ZAM-GTFR 的  $U(\tau)=\sin(\pi k\tau|\tau|)/\pi k\tau$  加窗效应,相对于 WVD 而言,能够有效降低噪声对信号检测的影响,使得基于 ZAM-GTFR 和 HT 的检测方法在低信噪比下性能优于 WHT,能够提高大约 1 dB 的信噪比。同时,相关法信号处理速度快,适合实时处理,但是在低信噪比环境下,检测概率大大下降。

#### 4 结束语

本文运用时频分析理论,推导了 LFM 信号的 ZAM-GTFR,利用 HT 成功提取了信号的特征参数,并探讨了 LFM 的检测性能。仿真分析表明,与基于 WHT 的信号检测方法相比,本文算法能够在更低的信噪比下获得高概率的检测性能。

#### 参考文献

- [ 1 ] BARBAROSSA S. Analysis of multicomponent LFM signals by a combined Wigner-Hough transform [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(6): 1511-1515.
- [ 2 ] 孙晓昶,皇甫堪. 基于 Wigner-Hough 变换的多分量 LFM 信号检测及离散计算方法[J]. 电子学报, 2003 (2):241-244.
- [ 3 ] 刘建成,王雪松,刘忠,等. 基于 Wigner-Hough 变换的 LFM 信号检测性能分析[J]. 电子学报, 2007(6):1212-1217.
- [ 4 ] KAY S, BOUDREAUX-BARTELS G. On the optimality of the Wigner distribution for detection [C]// IEEE International Conference on ICASSP ' 85. Washington D. C., USA: IEEE Press, 1985: 1017-1020.
- [ 5 ] WOOD J C, BARRY D T. Linear signal synthesis using the Radon-Wigner transform [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(8): 2105-2111.
- [ 6 ] 冉鑫,马世伟,曹家麟. 基于 Radon-Wigner 变换的多分量 LFM 信号的检测[J]. 上海大学学报, 2001(2): 119-122.
- [ 7 ] WANG M S, CHAN A K, CHUI C K. Linear frequency-modulated signal detection using Radon-ambiguity transform [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(3): 571-586.
- [ 8 ] JENNISON B K. Detection of polyphase pulse compression waveforms using the radon-ambiguity transform [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2003, 39(1): 335-343.
- [ 9 ] 刘爱芳,朱晓华,陆锦辉,等. 基于 Radon-Ambiguity 变换的多分量 LFM 信号检测与参数估计[J]. 南京理工大学学报, 2004(4):409-413.
- [ 10 ] 齐林,陶然,周思永,等. 基于分数阶 Fourier 变换的多分量 LFM 信号的检测和参数估计[J]. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2003(8):749-759.
- [ 11 ] 章步云,刘爱芳,朱晓华,等. 基于分数阶 Fourier 变换的多分量 LFM 信号检测与参数估计[J]. 数据采集与处理, 2003(4):408-411.
- [ 12 ] XU S W, SHUI P L. Nonparametric detection of frequency modulated signals using fractional Fourier transform [J]. Electronics Letters, 2010, 46 (9) : 649-650.
- [ 13 ] 李俊杰,李建忠,何友. LFM 信号检测算法的性能分析 [J]. 雷达科学与技术, 2009(6):456-460.
- [ 14 ] ZHAO Y, ATLAS L E, MARKS R J. The use of cone-shaped kernels for generalized time-frequency representations of nonstationary signals [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1990, 38(7): 1084-1091.
- [ 15 ] OH S, MARKS R J. Some properties of the generalized time frequency representation with cone-shaped kernel [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40 (7): 1735-1745.
- [ 16 ] ZENG D, ZENG X, LU G, et al. Automatic modulation classification of radar signals using the generalised time-frequency representation of Zhao, Atlas and Marks [J]. Radar, Sonar and Navigation, 2011, 5 (4): 507-516.
- [ 17 ] 张贤达,保铮. 非平稳信号分析与处理[M]. 北京:国防工业出版社,1998.