

# 基于双幂次趋近律的终端滑模舵机控制器设计

杨竞楠<sup>1,2</sup>, 杨峰<sup>1,2</sup>, 孟琪<sup>3</sup>, 郭明坤<sup>1,2</sup>, 夏广庆<sup>1,2</sup>

(1.大连理工大学 航空航天学院 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024; 2.大连理工大学 航空航天学院 辽宁省空天飞行器前沿技术重点实验室, 辽宁 大连 116024; 3.大连理工大学 信息与通信工程学院, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 针对电动舵机系统的快响应鲁棒控制问题, 提出了一种基于双幂次趋近律的全局非奇异终端滑模控制方法。首先, 建立了舵机系统的数学模型, 将气动干扰和摩擦建模为有界扰动; 其次, 根据系统模型构建非奇异终端滑模面, 结合双幂次趋近律设计舵机控制器, 从而保证滑模面的固定时间可达性, 充分利用滑模控制方法的鲁棒性和不变性, 并提高舵机系统的响应速度; 最后, 针对该控制器进行 Lyapunov 稳定性分析和数值仿真分析。相关结果表明: 新型控制方法使得系统误差在有限时间内收敛至零, 有效提升了舵机系统的响应速度和稳态精度。

**关键词:** 电动舵机; 固定时间稳定性; 双幂次趋近律; 非奇异终端滑模; 滑模控制; 有限时间控制

中图分类号: TM 301.2

文献标志码: A

DOI: 10.19328/j.cnki.2096-8655.2022.02.010

## Design of Terminal Sliding Mode Steering Gear Controller Based on Double Power Reaching Law

YANG Jingnan<sup>1,2</sup>, YANG Feng<sup>1,2</sup>, MENG Qi<sup>3</sup>, GUO Mingkun<sup>1,2</sup>, XIA Guangqing<sup>1,2</sup>

(1.State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, School of Aeronautics and Astronautics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, Liaoning, China; 2.Key Laboratory of Advanced Technology for Aerospace Vehicles of Liaoning Province, School of Aeronautics and Astronautics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, Liaoning, China; 3.School of Information and Communication Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, Liaoning, China)

**Abstract:** This paper proposes a global non-singular terminal sliding mode control method based on double power reaching law to solve the fast response robust control problem in an electric steering system. First, we establish the mathematical model for the steering gear system, with the aerodynamic disturbance and friction modeled as bounded disturbances. Second, we construct the non-singular terminal sliding mode surface according to the system model, and design the controller of the steering gear by combining the double power reaching law. As a result, we can ensure the fixed time accessibility of the sliding mode surface take full advantage of the robustness and invariance of the sliding mode control method, and improve the response speed of the steering gear system. Finally, analyses on the Lyapunov stability and numerical simulations are carried out for the controller. Relevant results show that the new control method makes the system error converge to zero within a finite-time, and effectively improves the performance of the steering gear system.

**Key words:** electric steering gear; fixed time stability; double power reaching law; non-singular terminal sliding mode; sliding mode control; finite time control

## 0 引言

电动舵机的性能直接影响了相关飞行器的控制精度和动态品质<sup>[1-3]</sup>。传统的舵机控制方法主要

有 PID 控制、模糊 PID 控制<sup>[4-5]</sup>、神经网络控制<sup>[6]</sup>等, 上述舵机控制方法虽然初步满足了舵机控制的使用需求, 但其收敛时间相对较长, 对不确定扰动的

收稿日期: 2021-06-15; 修回日期: 2021-08-02

基金项目: 辽宁省重点研发计划(2020JH2/10500003)

作者简介: 杨竞楠(1998—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为动力学与控制。

通信作者: 杨峰(1987—), 男, 博士, 助理研究员, 主要研究方向为动力学与控制。

抑制能力相对较弱。为了适应现代战争对飞行器更高控制品质的迫切需求,亟须进行快响应、强鲁棒性<sup>[7]</sup>舵机控制技术的研究。

樊泽明等<sup>[8]</sup>和吴春等<sup>[9]</sup>将鲁棒控制方法应用于电动舵机控制,有效提高了电动舵机的鲁棒性,但是结构复杂,保守性强。赵峰等<sup>[10]</sup>在电动舵机控制中采用滑模变结构控制,苏伟杰等<sup>[11]</sup>将变指数趋近律滑模控制器与PID控制器相结合设计组合控制器,2种方法提高了电动舵机的抗干扰能力和鲁棒性,但依靠线性滑模控制方法难以实现舵机系统的快速稳定。近年来,有限时间稳定理论日趋完善,相关方法具有收敛速度快<sup>[12]</sup>、抗干扰能力强、鲁棒性好等特点。终端滑模控制(TSMC)采用非线性滑模面代替传统的线性滑模面,能保证系统状态在有限时间内稳定<sup>[13-14]</sup>。特别地,非奇异终端滑模(NSTSM)控制方法克服了奇异现象,且结构相对简单,便于工程应用<sup>[15]</sup>。本文将NSTSM方法为基础,结合双幂次趋近律(DPRL)进行舵机系统鲁棒控制器的设计分析,其中DPRL方法能够保证系

统状态在固定时间内到达滑模面<sup>[16]</sup>,从而更高效地利用NSTSM方法的强鲁棒性和有限时间收敛特性。

## 1 数学模型

电动舵机系统主要由舵机控制器、伺服电机、功率放大器、减速机构和位置传感器构成,如图1所示。在不考虑电枢电感的情况下,可以用机电转换方程、反电动势方程、转子电路电压方程和机械方程来表示电动舵机的数学模型:

$$\begin{cases} T_m = K_m \cdot I_A \\ E_m = K_e \cdot \omega_m \\ U_m = E_m + R \cdot I_A + L \cdot \dot{I}_A \\ T_m = T_h + T_f + T_J \end{cases} \quad (1)$$

式中: $T_m$ 为电机输出扭矩; $T_h$ 为铰链力矩; $T_f$ 为摩擦力矩; $T_J$ 为惯性力矩; $K_m$ 为转矩常数; $I_A$ 为电枢电流; $E_m$ 为电机反电动势; $K_e$ 为感应电动势系数; $U_m$ 为电枢电压; $R$ 为电枢回路总电阻; $L$ 为电枢回路总电感。

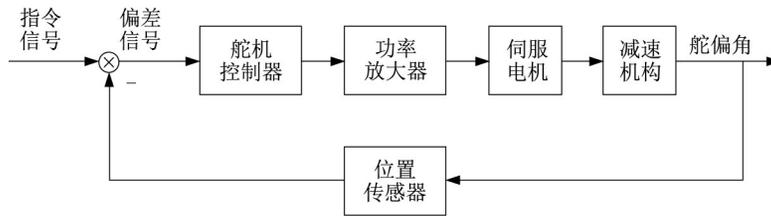


图1 舵机系统结构

Fig. 1 Steering gear system structure

惯性力矩 $T_J$ 具体形式为

$$T_J = J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2)$$

式中: $\theta$ 为舵机系统实际输出的舵偏角; $J$ 为电机等效负载转动惯量。

将式(2)代入式(1),得舵机系统的动力学模型:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{U_m \cdot K_m}{J \cdot R} - \frac{K_e \cdot K_m}{J \cdot R} \cdot \frac{d\theta}{dt} - \frac{T_h + T_f}{J} \quad (3)$$

一般情况下,将铰链力矩和摩擦力矩视为扰动项。如果期望舵偏角指令为 $\theta_d(t)$ ,定义跟踪误差 $e_1(t) = \theta(t) - \theta_d(t)$ , $e_2(t) = \dot{e}_1(t)$ ,那么可得舵机系统跟踪误差动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = e_2(t) \\ \dot{e}_2(t) = \ddot{\theta}(t) - \ddot{\theta}_d(t) = \kappa e_2 + bU_m + d + \kappa\dot{\theta}_d(t) - \ddot{\theta}_d(t) \end{cases} \quad (4)$$

式中: $\kappa = -(K_e \cdot K_m)/(J \cdot R)$ ; $b = K_m/(J \cdot R)$ ; $d = -(T_h + T_f)/J$ 。

舵机鲁棒控制器的设计目标为:在不确定扰动影响下,系统的跟踪误差 $e_1(t)$ 、 $e_2(t)$ 能够在有限时间内收敛到零,即存在有限时刻 $t_f \ll +\infty$ ,当 $t \rightarrow t_f$ 时,有下式成立:

$$e_1(t) \rightarrow 0, \quad e_2(t) \rightarrow 0 \quad (5)$$

## 2 基于终端滑模的控制器设计

### 2.1 基于非奇异终端滑模控制的控制律

式(4)所示系统是典型的含有不确定扰动的二阶系统,为了实现该系统的快速稳定控制,本文将结合NSTSM和DPRL进行控制器设计。首先,滑模变量设计如下:

$$s(t) = e_1(t) + \frac{1}{\beta} |e_2(t)|^\alpha \text{sign}(e_2(t)) \quad (6)$$

式中:  $\beta > 0$  为设计常数;  $1 < \alpha < 2$ 。

对上式求导可得

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{e}_1(t) + \frac{\alpha}{\beta} |e_2(t)|^{\alpha-1} \dot{e}_2(t) = \\ &e_2(t) + \frac{\alpha}{\beta} |e_2(t)|^{\alpha-1} \dot{e}_2(t) = \\ &e_2(t) + \frac{\alpha}{\beta} |e_2(t)|^{\alpha-1} (\kappa e_2(t) + \\ &bU_m(t) + d + \kappa\dot{\theta}_d(t) - \ddot{\theta}_d(t)) \quad (7) \end{aligned}$$

结合滑模动力学方程式(7), 系统(4)的控制器设计如下:

$$U_m(t) = u_{\text{eq}}(t) + u_n(t) + u_{\text{disc}}(t) \quad (8)$$

$$u_{\text{eq}}(t) = \left( -\kappa e_2(t) - \frac{\beta}{\alpha} |e_2(t)|^{2-\alpha} \right) / b \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \left( -k_1 |s|^{a_1} \text{sign}(s) - \right. \\ &\left. k_2 |s|^{a_2} \text{sign}(s) \right) \frac{\beta}{b\alpha} |e_2(t)|^{1-\alpha} \quad (10) \end{aligned}$$

式中:  $k_1 > 0$ ;  $k_2 > 0$ ;  $a_1 > 1$ ;  $0 < a_2 < 1$ 。

$$u_{\text{disc}}(t) = (-K \text{sign}(s)) \frac{\beta}{b\alpha} |e_2(t)|^{1-\alpha} \quad (11)$$

式中:  $u_{\text{eq}}(t)$  为等效控制项;  $u_n(t)$  为趋近控制项;  $u_{\text{disc}}(t)$  为不连续控制项。

将系统(4)中的  $d + \kappa\dot{\theta}_d(t) - \ddot{\theta}_d(t)$  作为系统的集总扰动项  $w(t)$ , 根据负反馈原理, 非线性增益设计为

$$K \geq \left| \frac{\alpha}{\beta} E^{\alpha-1} W \right| \quad (12)$$

式中:  $E$  为系统状态变量  $e_2(t)$  的上界值;  $W$  为系统集总扰动项  $w(t)$  的上界值。

## 2.2 李雅普诺夫稳定性证明

为了便于稳定性分析, 给出如下定义<sup>[17]</sup>。

**定义 1** 考虑如下动态控制系统:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), v(t), t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (13)$$

式中:  $x(t) \in R^n$ ;  $v(t) \in R^m$ 。

从任意初始状态  $x_0 \in R^n$  出发, 如果存在一个时刻  $T$ , 使得系统满足: 当  $t \geq T$  时,  $x(t) = 0$ , 那么这样的系统叫做一致有限时间收敛到原点。如果系统的原点为一致有限时间稳定, 且收敛时间  $T$  有界, 即存在  $T_{\text{max}} > 0$ , 使得  $T \leq T_{\text{max}}, \forall x_0 \in R^n$ , 则称系统

为固定时间收敛到原点。

**定理 1** 对于系统(4)和 NSTSM 滑模面(6), 式(8)中的控制器将使得滑模变量在固定时间内收敛到滑模面上, 同时实现被控系统(4)在有限时间内稳定。

**证明:** 将分为两步进行, 首先分析滑模面的固定时间可达性, 其次证明在 NSTSM 滑模面上, 系统状态在有限时间内到达平衡点。

**步骤 1** 选取李雅普诺夫函数如下:

$$V = s^2 \quad (14)$$

对式(14)求导, 并将式(7)代入, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = 2s\dot{s} &= 2s \left[ e_2(t) + \frac{\alpha}{\beta} |e_2(t)|^{\alpha-1} \dot{e}_2(t) \right] = \\ &2s \left[ e_2(t) + \frac{\alpha}{\beta} |e_2(t)|^{\alpha-1} (\kappa e_2(t) + bU_m(t) + \right. \\ &\left. d + \kappa\dot{\theta}_d(t) - \ddot{\theta}_d(t)) \right] = \\ &2s \left[ \frac{\alpha}{\beta} |e_2(t)|^{\alpha-1} (t) \left( \frac{\beta}{\alpha} |e_2(t)|^{2-\alpha} + \kappa e_2(t) + \right. \right. \\ &\left. \left. bu_{\text{eq}}(t) + bu_{\text{disc}}(t) + bu_n(t) + w(t) \right) \right] = \\ &2s \left[ -k_1 |s|^{a_1} \text{sign}(s) - k_2 |s|^{a_2} \text{sign}(s) - \right. \\ &\left. K \text{sign}(s) + \frac{\alpha}{\beta} |e_2(t)|^{\alpha-1} (t) w(t) \right] \leq \\ &-2k_1 |s|^{a_1+1} - 2k_2 |s|^{a_2+1} + \\ &2|s| \left( \frac{\alpha}{\beta} |e_2(t)|^{\alpha-1} (t) w(t) - K \right) \leq \\ &-2k_1 |s|^{a_1+1} - 2k_2 |s|^{a_2+1} = \\ &-2k_1 V^{(a_1+1)/2} - 2k_2 V^{(a_2+1)/2} = \\ &-2k_1 V^{1+(a_1-1)/2} - 2k_2 V^{1-(1-a_2)/2} \quad (15) \end{aligned}$$

由文献[18]中的定理 13 可知, 滑模变量  $s$  将在固定时间内收敛到零, 即系统轨线将在固定时间内收敛到滑模面上, 收敛时间满足

$$T_1 \leq T_{\text{max}} = \frac{1}{k_1(a_1-1)} + \frac{1}{k_2(1-a_2)} \quad (16)$$

**步骤 2** 由第一步证明可知, 存在  $T_1 > 0$ , 当  $t \geq T_1$  时,  $s = 0$  成立, 此时

$$e_1(t) + \frac{1}{\beta} |e_2(t)|^\alpha \text{sign}(e_2(t)) = 0 \quad (17)$$

由引理 1 可证明系统到达平衡点的时间有限。

定义李雅普诺夫函数如下:

$$V = \frac{1}{2} e_1^2(t) \quad (18)$$

根据式(17)对  $V$  求导,有

$$\dot{V} = e_1(t)\dot{e}_1(t) = -e_1(t)\beta^{1/\alpha}|e_1(t)|^{1/\alpha}\text{sign}(e_1(t)) = -\lambda V^\eta \quad (19)$$

式中: $\lambda = 2^{(1/\alpha+1)/2}\beta^{1/\alpha} > 0; \eta = (1/\alpha + 1)/2 < 1$ 。

由文献[18]中的定理 12 可知,以  $T_1$  时刻为起始点,系统状态  $e_1(t)$  将在有限时间  $T_2$  内收敛到零,其中  $T_2$  满足当  $t \geq T_2$  时,  $e_1(t) = 0$ , 且

$$T_2 = \frac{V^{1-\eta}(0)}{\lambda(1-\eta)} = \frac{\alpha}{\beta^{1/\alpha}(\alpha-1)} e_1(0)^{(1-1/\alpha)} \quad (20)$$

又因为  $e_2(t) = \dot{e}_1(t)$ , 故系统状态  $e_2(t)$  也在有限时间  $T_2$  内收敛到零。综上,由于  $T_1, T_2$  均为有限时间常数,因此,系统(4)将在有限时间内收敛到零。

### 3 仿真分析

本文通过 Simulink 工具箱搭建了电动舵机控制系统仿真模型,对上述控制方法进行数值仿真。电

动舵机系统参数为:  $K_e = 0.0215 \text{ V} \cdot \text{s}/\text{rad}$ ,  $K_m = 0.0214 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{A}$ ,  $J = 31.35 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$ ,  $R = 0.74 \Omega$ , 外部干扰  $d = 0.1\sin(\pi t) + 0.15\sin(10t) + 0.05$ , 仿真步长  $h = 0.001 \text{ s}$ , 仿真时间  $t = 10 \text{ s}$ 。控制器参数为:  $\beta = 3000$ ,  $\alpha = 1.667$ ,  $k_1 = 200$ ,  $k_2 = 200$ ,  $a_1 = 1.47$ ,  $a_2 = 0.50$ , 对于不同的输入指令,  $K$  的具体取值可根据仿真情况调整。为了减缓抖振现象,在滑模控制中往往采用双曲函数<sup>[19]</sup>替换不连续控制项中的符号函数,双曲函数的形式如下:

$$\tanh\left(\frac{s}{\epsilon}\right) = \frac{e^{s/\epsilon} - e^{-s/\epsilon}}{e^{s/\epsilon} + e^{-s/\epsilon}} \quad (21)$$

式中:选取  $\epsilon = 0.1$ 。

为验证所设计控制律的有效性,将 NSTSM 控制律与传统 PID 控制<sup>[20]</sup>进行了对比。以方波信号和变频率正弦信号作为舵机输入指令对控制器进行仿真,仿真波形如图 2~图 5 所示。其中,方波信号的幅值为  $0.1 \text{ rad}$ , 周期为  $2 \text{ s}$ , 占空比为  $50\%$ ; 变正弦信号的幅值为  $0.1 \text{ rad}$ , 初始频率为  $1 \text{ Hz}$ , 终点频率为  $5 \text{ Hz}$ 。

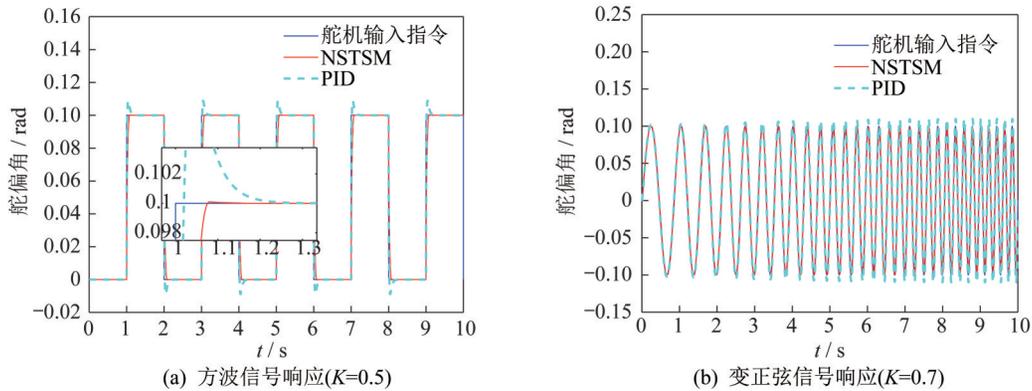


图 2 舵机响应

Fig. 2 Steering gear response

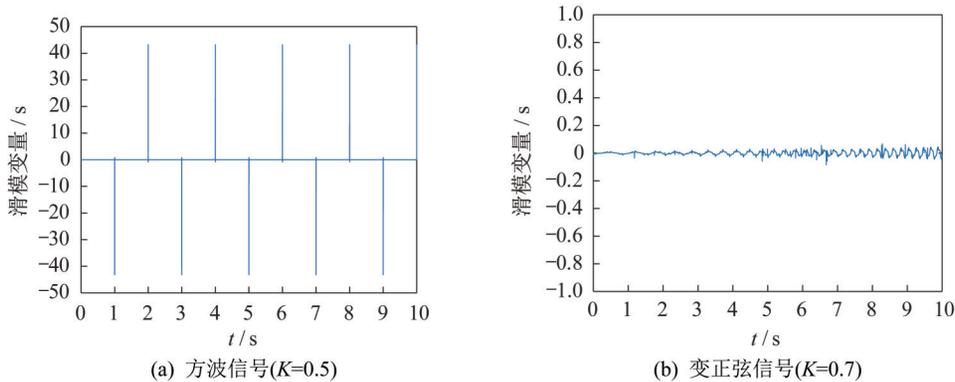


图 3 滑模变量

Fig. 3 Sliding mode variable

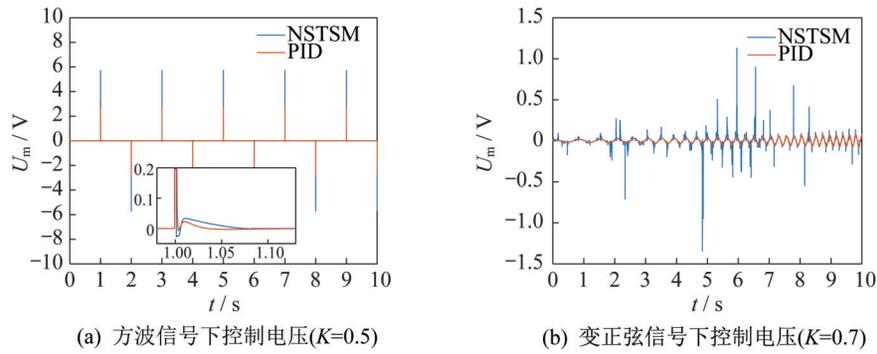


图 4 电机控制电压

Fig. 4 Motor control voltage

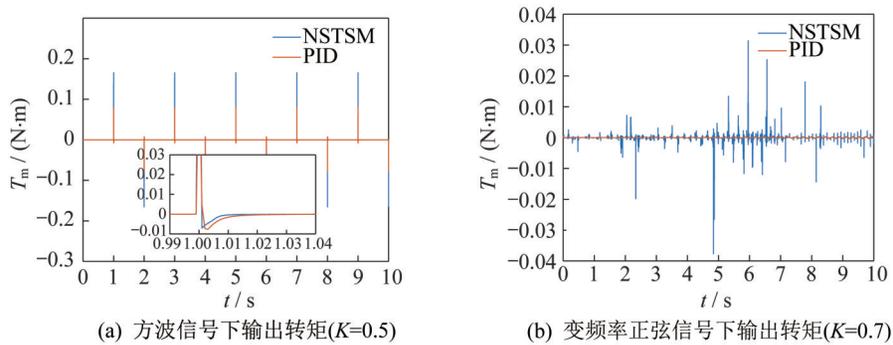


图 5 电机输出转矩

Fig. 5 Output torque of the motor

方波信号与变正弦信号下电动舵机的响应曲线如图 2 所示。由图 2(a)可知,当输入指令为方波信号时,采用 NSTSM 控制器的舵机系统的收敛时间为 0.1 s 左右,并且与采用 PID 控制器的舵机系统相比无超调。此外,由于采用了双曲函数,系统的抖振得到了很好的抑制,位置跟踪稳态基本无抖振。由图 2(b)可知,当输入指令为变正弦信号时,采用 NSTSM 控制器的舵机系统响应曲线几乎与输入指令重合,而采用 PID 控制器的舵机系统虽然一开始也能准确跟踪输入指令,但随着正弦信号频率的加快跟踪误差越来越大。因此,无论是方波信号还是变正弦信号, NSTSM 都能快速准确地跟上输入指令,实现预期控制目标,系统具有良好的快速性、鲁棒性和稳态响应精度。

2 种信号下舵机系统滑模变量的仿真波形如图 3 所示。对于方波信号,在信号发生阶跃变化时滑模变量具有较大变化但很快收敛至零,收敛时间为 0.01 s,验证了 DPRL 的固定时间可达性。此外,由于运用双曲函数取代符号函数,滑模变量的抖振现象得到了很好的抑制;对于变正弦信号,由于输入指令每时每刻都在变化,因此滑模变量也在不断变

化。随着正弦信号频率的增加,滑模变量的变化频率也越来越快。

2 种信号下电动舵机控制电压和输出转矩的仿真波形如图 4、图 5 所示。从图中可以看出,对于方波信号,在信号发生阶跃变化时,两种舵机系统的控制电压和输出转矩都很快收敛至零。从局部放大图中可以看出,双曲函数对于抖振现象有很好的抑制作用;对于变正弦信号,随着正弦信号频率的增加, NSTSM 舵机系统的仿真曲线出现了“尖刺”现象,采用 PID 控制器的舵机系统的仿真曲线呈变正弦状,幅值变化较小,其仿真曲线的频率和幅值随着信号频率的增加而逐渐增大。

#### 4 结束语

本文结合非奇异终端滑模和固定时间收敛思想,设计了一种基于双幂次趋近律的全局非奇异终端滑模舵机控制器,该控制器克服了传统控制方法收敛速度慢的不足,大幅度提高了电动舵机的响应速度和鲁棒性,使系统具有一定的抗干扰能力,具有一定的工程应用价值。

## 参考文献

- [1] 郭永凤. 电动伺服舵机的控制与仿真[J]. 计算技术与自动化, 2019, 38(3): 60-63.
- [2] 李克勇, 杨永强, 黄金. 高机动旋转导弹鸭式双通道控制研究[J]. 上海航天, 2016, 33(2): 53-57.
- [3] 王枫, 梁谷, 梅志伟, 等. 双通道控制旋转导弹舵面控制律研究[J]. 上海航天, 2017, 34(增刊1): 100-104.
- [4] 李全福, 万彦辉, 郭华. 模糊PID控制算法在电动舵机控制中的应用[J]. 微电机, 2007(12): 28-30, 47.
- [5] 曹菁. 电动舵机模糊自适应PID控制方法[J]. 微电机, 2007(10): 89-92.
- [6] 杨艺, 虎恩典. 基于S函数的BP神经网络PID控制器及Simulink仿真[J]. 电子设计工程, 2014, 22(4): 29-31, 35.
- [7] 孙立伟, 钟宜生, 姜雨石. 电动舵机鲁棒干扰补偿控制[J]. 导弹与航天运载技术, 2019(6): 83-88.
- [8] 樊泽明, 朱龙飞. 电动舵机加载系统鲁棒综合设计[J]. 电子设计工程, 2013, 21(16): 72-75.
- [9] 吴春, 齐蓉, 陈晓雷. 基于障碍Lyapunov函数的输出有界全局收敛鲁棒控制[J]. 控制与决策, 2015, 30(3): 448-454.
- [10] 赵峰, 顾鹏程, 赵宇宏. 滑模变结构控制在电动舵机上的应用研究[J]. 上海航天, 2011, 28(6): 64-68.
- [11] 苏伟杰, 张军, 张波, 等. 永磁同步电动舵机系统滑模变结构控制器设计[J]. 上海航天, 2018, 35(3): 101-107.
- [12] 刘洋, 井元伟, 刘晓平, 等. 非线性系统有限时间控制研究综述[J]. 控制理论与应用, 2020, 37(1): 1-12.
- [13] 王艳敏, 冯勇, 陆启良. 永磁同步电动机的无抖振滑模控制系统设计[J]. 电机与控制学报, 2008(5): 514-519.
- [14] 刘云峰, 缪栋, 方文斌, 等. 导弹电液伺服机构的终端滑模控制研究[J]. 上海航天, 2007(1): 12-15, 37.
- [15] 冯勇, 鲍晟, 余星火. 非奇异终端滑模控制系统的设计方法[J]. 控制与决策, 2002(2): 194-198.
- [16] 李慧洁, 蔡远利. 基于双幂次趋近律的滑模控制方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(3): 498-502.
- [17] BASIN M, PANATHULA C B, SHTESSEL Y. Adaptive uniform finite-/fixed-time convergent second-order sliding-mode control[J]. International Journal of Control, 2016, 89(9): 1777-1787.
- [18] POLYAKOV A, FRIDMAN L. Stability notions and Lyapunov functions for sliding mode control systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351(4): 1831-1865.
- [19] ZHOU D, XU B. Adaptive dynamic surface guidance law with input saturation constraint and autopilot dynamics[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2016, 39(5): 1155-1162.
- [20] 王宏福. 某制导火箭弹舵机系统自抗扰控制技术研究[D]. 太原: 中北大学, 2019.