基于模态缩聚的限位状态驱动机构非线性动力学分析

潘望白,方贤亮,欧阳涵,梁志林,臧　旭
(上海宇航系统工程研究所,上海 201109)

摘　要: 含限位的驱动机构具有刚度非线性特征,在正弦振动力学试验中,不同试验量级加速度激励下其主频位置、响应放大倍数等动力学特性均会发生变化,需要开展动力学响应分析提前预示非线性影响,指导产品抗力学环境设计。基于模态缩聚理论,发展了一套针对限位非线性问题的正弦振动响应快速分析方法,可适用于各类复杂驱动机构类产品,避免了大规模有限元模型的非线性计算。算例分析表明:该方法可有效预示不同振动输入量级下限位非线性对产品响应特性的影响,反映出典型的非线性频响突变现象,且计算效率高,可为产品力学特性仿真和力学试验的开展提供有力支持。

关键词: 模态缩聚; 限位非线性; 驱动机构; 正弦振动试验; 有限元分析

中图分类号: O 332; V 146.5　　**文献标志码:** A　　**DOI:** 10.19328/j.cnki.2096-8655.2022.06.005

Nonlinear Dynamic Analysis of Driving Mechanism with Limitation Based on Modal Reduction

PAN Wangbai, FANG Xianliang, OUYANG Han, LIANG Zhilin, ZANG Xu
(Shanghai Aerospace System Engineering Institute, Shanghai 201109, China)

Abstract: The driving mechanism with limitation constraint has the characteristic of stiffness nonlinearity. In sinusoidal vibration tests, its dynamic characteristics, e.g., dominant frequency location and response amplification ratio, will vary with the magnitude of acceleration excitation. Therefore, it is necessary to carry out dynamic response analysis to predict the influence of nonlinearity in advance and to guide the product design of resistance to the mechanical environment. Based on the theory of modal reduction, an analysis method is developed for rapid response calculation under sinusoidal vibration with the consideration of limitation nonlinearity. The method is applicative for all kinds of complex driving mechanisms, and can avoid the nonlinear calculation of large-scale finite element models. The case study reveals that this method can effectively predict the effects of limitation nonlinearity on the response features of products under different vibration loads and produce typical phenomena of frequency response snap-through with high computational efficiency. The developed method can provide strong support for dynamic characteristic simulations and mechanical tests.

Key words: modal reduction; limitation nonlinearity; driving mechanism; sinusoidal vibration test; finite element analysis

0　引言

航天器上,各类带有指向需求的天线、雷达等通常采用多维驱动机构安装至航天器主结构上,此类“驱动机构+载荷”的组合体自身往往无法抵抗发射过程的力学环境,需要采用火工锁紧方式满足抗力学环境需求。常见的锁紧方式包括爆炸螺栓、分离螺母、拔销器等,其中拔销器是一种典型依靠限位的锁紧方式,其销杆与销孔间存在间隙,构成

收稿日期: 2022-09-06; **修回日期:** 2022-09-30

作者简介: 潘望白(1991—),男,博士,工程师,主要研究方向为结构动力学和航天产品力学环境设计。

典型的限位非线性系统。间隙与限位等非线性因素会在结构振动过程中不断改变结构的刚度特性，进而对动力学特性产生较大的影响。PRAVEEN-KRISHNA 等[1]和 KRISHNA 等[2]建立了悬臂梁“弹性-弹性约束端”和“弹性-非弹性约束端”的非线性动力学响应模型，研究了不同载荷激励下梁的频响特性，揭示了频响“跳跃”现象。孙樱等[3]对含局部限位的悬臂梁模型，基于描述函数和逆矩阵更新方法对该非线性问题开展了仿真分析，提高了此类非线性问题的分析效率，仿真复现了频点飘移和频响跳跃现象。CHEN 等[4]和 WU 等[5]针对复合材料板刚度硬化非线性效应，通过仿真和试验研究不同振动量级下板壳结构的非线性响应特性，同样存在频响“跳跃”现象。

通常，在航天产品或大型航天器正弦力学试验过程中，基于线性假设以小量级来判断产品基频和响应特性，用于确定最终满量级的试验条件并预示相应的响应结果[6-8]。然而，大量研究表明[1-5]，间隙、限位、硬化等各类非线性效应的引入，使得产品频响特性存在偏移、跳跃现象，通过小量级预振结果线性预示满量级响应存在试验风险，严重时会因条件制定偏差造成产品破坏。因此，对于存在显著非线性刚度环节的产品，必须在产品设计阶段识别非线性影响，开展考虑非线性的不同量级下频响分析，对可能出现的试验现象进行预示。对于含拔销器的驱动机构，其结构相比常见的梁、板结构较为复杂，为准确刻画其局部几何特性、连接关系等，通常采用实体单元对结构部分建模以获得准确动力学特性，建立的有限元模型自由度数目较大，直接开展非线性动力学仿真的计算复杂度较高，亟需发展一套适用于复杂含限位结构的快速非线性动力学预示方法，以满足工程设计的迭代与预示需求。

充分借鉴模态缩聚方法在各类动力学——包括非线性动力学分析上的效率和精度优势[9-11]，本文针对含间隙限位的驱动机构，采取复杂有限元模型降阶处理方式，提出了考虑限位边界的模态缩聚应用方法，利用接触反力处理限位非线性特性，实现了考虑限位非线性效应的复杂机构正弦振动试验响应快速预示，相关仿真结果说明了限位对产品的响应特性影响，用于指导产品抗力学环境能力设计和正弦振动试验开展。

1 基于模态缩聚的限位非线性分析方法

1.1 考虑限位的模态缩聚运动方程

内部含限位的弹性体如图 1 所示，其中点 1 为激励来源，点 2 和点 3 为弹性内部结构限位位置，点 3 位置可以实现对点 2 的双向限位，d_g 为原始间隙距离。考虑限位区域较小，可假设点 3 两侧具有相同的运动状态，可统一用 $\boldsymbol{u}_3$ 表示。

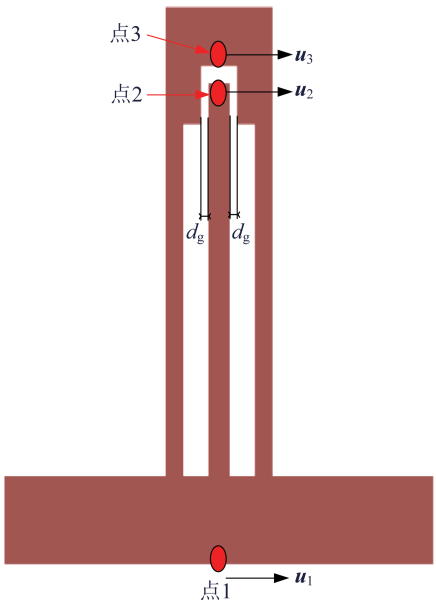

图 1 含限位弹性体图

Fig. 1 Diagram of elastic structure with limitation

该弹性体经有限元离散后，不考虑限位的无阻尼动力学方程可以表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{jj} & \boldsymbol{M}_{ji} \\ \boldsymbol{M}_{ji}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{u}}_1 \\ \ddot{\boldsymbol{q}}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{jj} & \boldsymbol{K}_{ji} \\ \boldsymbol{K}_{ji}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{u}_1$ 为激励点位移(6 自由度)；$\boldsymbol{f}_1$ 为外激励；$\boldsymbol{q}_i$ 为弹性体内部节点自由度向量；$\boldsymbol{M}$ 为质量矩阵；$\boldsymbol{K}$ 为刚度矩阵。

利用 Craig-Bampton 方法[12-15]对物理坐标进行模态缩聚，即令

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_6 & 0 \\ -\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{K}_{ij} & \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} = T\bar{\boldsymbol{q}} \tag{2}$$

$$(\boldsymbol{M}_{ii} - \omega^2 \boldsymbol{K}_{ii})\boldsymbol{\varphi} = 0 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \cdots, \boldsymbol{\varphi}_{n_K}] \tag{4}$$

式中：矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 由式(3)截取的前 n_K 阶模态向量组成，称为固定界面主模态矩阵(式(4))；$\boldsymbol{\xi}$ 为对应的广义模态坐标，保留模态对应的圆频率为

$\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n_K}\}$。$\boldsymbol{\Phi}$ 满足关于 $\boldsymbol{M}_{ii}$ 的归一化条件，即

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{ii}\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{I}_{n_K}\\&\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{ii}\boldsymbol{\Phi}=\mathrm{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \cdots, \omega_{n_K}^2)\end{aligned}\tag{5}$$

记式(2)中分块矩阵第一列为 $\boldsymbol{\Psi}$，称为约束模态，表示了界面各自由度运动单位为1时，弹性体上全部自由度的运动情况：

$$\boldsymbol{\Psi}=[\ \boldsymbol{I}_6\quad(-\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{K}_{ij})^{\mathrm{T}}\ ]^{\mathrm{T}}=[\ \boldsymbol{I}_6\quad \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\ ]^{\mathrm{T}}\tag{6}$$

式(2)给出了经 Craig-Bampton 方法缩聚后物理节点位移与广义模态坐标之间的变换关系。将式(2)代入式(1)并在方程两侧同时左乘 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$，则弹性体的缩聚后的运动方程为

$$\bar{\boldsymbol{M}}\begin{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{u}}_1\\ \ddot{\boldsymbol{\xi}}\end{bmatrix}+\bar{\boldsymbol{K}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1\\ \boldsymbol{\xi}\end{bmatrix}=\bar{\boldsymbol{F}}\tag{7}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{K}}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{jj} & \boldsymbol{K}_{ji}\\ \boldsymbol{K}_{ji}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_{ii}\end{bmatrix}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{K}}_{jj} & 0\\ 0 & \bar{\boldsymbol{K}}_{\xi\xi}\end{bmatrix}\tag{8}$$

$$\bar{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{jj} & \boldsymbol{M}_{ji}\\ \boldsymbol{M}_{ji}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M}_{ii}\end{bmatrix}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{M}}_{jj} & \bar{\boldsymbol{M}}_{j\xi}\\ \bar{\boldsymbol{M}}_{j\xi}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{I}_{n_K}\end{bmatrix}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\bar{\boldsymbol{K}}_{jj}=\boldsymbol{K}_{jj}-\boldsymbol{K}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{K}_{ij}\\&\bar{\boldsymbol{K}}_{\xi\xi}=\mathrm{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \cdots, \omega_{n_K}^2)\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}&\bar{\boldsymbol{M}}_{\xi j}=\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{ij}+\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{ii}\boldsymbol{C}\\&\bar{\boldsymbol{M}}_{jj}=\boldsymbol{M}_{jj}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{ii}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{ij}+\boldsymbol{M}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\end{aligned}\tag{11}$$

$$\bar{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_1\\ 0_{n_K\times n_K}\end{bmatrix}\tag{12}$$

式(7)构成了不考虑限位的缩聚模型运动方程。对于限位，采用接触刚度引起的非线性接触力来处理。设图1中点2和点3限位方向自由度 $\boldsymbol{u}_2$ 和 $\boldsymbol{u}_3$ 在 $\boldsymbol{q}_i$ 中对应的自由度编号分别为 α 和 β，则考虑接触后的反作用力，式(1)可以补充表示为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{jj} & \boldsymbol{M}_{ji}\\ \boldsymbol{M}_{ji}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M}_{ii}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{u}}_1\\ \ddot{\boldsymbol{q}}_i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{jj} & \boldsymbol{K}_{ji}\\ \boldsymbol{K}_{ji}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_{ii}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1\\ \boldsymbol{q}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_1\\ -\delta\boldsymbol{K}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)\end{bmatrix}\tag{13}$$

式中：$\delta\boldsymbol{K}$ 为列向量，其第 i 个元素为

$$\delta K_i=\begin{cases}\bar{k}_{\mathrm{g}}, & i=\alpha\\ -\bar{k}_{\mathrm{g}}, & i=\beta\\ 0, & \text{else}\end{cases}\tag{14}$$

$$\bar{k}_{\mathrm{g}}=\begin{cases}k_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3+d_{\mathrm{g}}), & \boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3\leqslant -d_{\mathrm{g}}\\ k_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3-d_{\mathrm{g}}), & \boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3\geqslant d_{\mathrm{g}}\\ 0, & |\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3|<d_{\mathrm{g}}\end{cases}\tag{15}$$

式中：k_{g} 为接触刚度；d_{g} 为原始间隙距离。式(15)假设两侧限位间隙距离相等。

将式(2)对应的缩聚关系代入式(13)，可得考虑限位的缩聚模型为

$$\bar{\boldsymbol{M}}\begin{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{u}}_1\\ \ddot{\boldsymbol{\xi}}\end{bmatrix}+\bar{\boldsymbol{K}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1\\ \boldsymbol{\xi}\end{bmatrix}=\tilde{\boldsymbol{F}}\tag{16}$$

式中：

$$\tilde{\boldsymbol{F}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_1-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{K}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)\\ -\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{K}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)\end{bmatrix}\tag{17}$$

1.2　正弦振动试验模拟及响应计算

在航天领域，正弦振动试验是考核单机设备抗低频力学环境的关键试验，试验条件中除了各频点的加速度量级外，还规定了对数扫描速率 λ，单位为“倍频程每分钟”，记做 oct/min，常见的扫描速率有 4 oct/min 和 2 oct/min 等[15]。λ 分为正表示正向扫描（频率从小到大变化）、负表示负向扫描（频率从大到小变化）。λ 含义为：假设在起始时刻 $t=0$ 时正弦信号为 f_0，则任意时刻 t（以 s 为单位）的正弦信号频率为

$$f(t)=f_0\times 2^{\frac{\lambda}{60}t}\tag{18}$$

由此，t 时刻正弦信号相位的角速度可以表示为

$$\omega(t)=2\pi f_0\times 2^{\frac{\lambda}{60}t}\tag{19}$$

则 t 时刻正弦信号的相位可由相位角速度积分获得

$$\phi(t)=\int_0^t\omega(\tau)\,\mathrm{d}\tau=2\pi f_0\frac{60}{\lambda\ln 2}\left(2^{\frac{\lambda}{60}t}-1\right)\tag{20}$$

依据振动条件幅频曲线及式(18)可以确定试验要求的振动台加速度幅值与时间的关系为 $A(t)$，则任意时刻振动台的加速度信号可以表示为

$$a(t)=A(t)\cos\phi(t)\tag{21}$$

如图1所示，弹性体开展振动台上正弦振动试验时，$\boldsymbol{u}_1$ 的6个自由度中仅振动台振动方向存在强迫加速度激励，其他自由度激励均为零。以 Y 向振动为例，则有

$$\ddot{\boldsymbol{u}}_1=\begin{bmatrix}0 & a(t) & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\tag{22}$$

将式(22)代入式(16)的第2个方程，并考虑模态阻尼，则有

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}}+\bar{\boldsymbol{C}}_{\xi\xi}\dot{\boldsymbol{\xi}}+\bar{\boldsymbol{K}}_{\xi\xi}\boldsymbol{\xi}=-\bar{\boldsymbol{M}}_{j\xi}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{u}}_1-\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{K}(u_2, u_3)\tag{23}$$

式中：$\ddot{\boldsymbol{u}}_1$ 完全由 $a(t)$ 确定；$\bar{\boldsymbol{M}}_{j\xi}^{\mathrm{T}}$ 为耦合系数矩阵；$\bar{\boldsymbol{C}}_{\xi\xi}$ 为假设的模态阻尼矩阵，

$$\bar{C}_{\xi\xi}=\mathrm{diag}\left(2c_1\omega_1,2c_2\omega_2,\cdots,2c_{n_K}\omega_{n_K}\right) \tag{24}$$

式中：c_i为各阶固定界面主模态的模态阻尼比。

由于$\bar{C}_{\xi\xi}$和$\bar{K}_{\xi\xi}$均为对角阵，式(23)实际上为n_K个独立的二阶常微分方程，可以采用各类经典数值算法——如Runge-Kutta法[16]等完成计算。式(23)中的非线性项$\delta\boldsymbol{K}$涉及任意时刻$\boldsymbol{u}_2$和$\boldsymbol{u}_3$的计算，依据式(2)和式(6)，可通过$\boldsymbol{q}_i=\boldsymbol{C}\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\xi}$计算得到的$\boldsymbol{q}_i$中的第$\alpha$和$\beta$个元素近似表达。注意到对于单界面约束条件下，$\boldsymbol{u}_1$在某方向进行平动位移时，弹性体整体进行相同的刚体平动，因此$\boldsymbol{C}\boldsymbol{u}_1$对应的弹性体内部各处平动位移与$\boldsymbol{u}_1$一致。数值求解过程中获得$\boldsymbol{u}_2$和$\boldsymbol{u}_3$的目的是完成式(15)中两者差值计算，在实际求解过程中仅需获得$\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\xi}$的第$\alpha$和$\beta$个元素代入式(15)而无需求解$\boldsymbol{C}\boldsymbol{u}_1$，过程中进一步简化可以表示为

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_2=\boldsymbol{\Phi}_\alpha\boldsymbol{\xi},\quad \tilde{\boldsymbol{u}}_3=\boldsymbol{\Phi}_\beta\boldsymbol{\xi} \tag{25}$$

式中：$\boldsymbol{\Phi}_\alpha$、$\boldsymbol{\Phi}_\beta$分别为$\boldsymbol{\Phi}$的第α和β行。

同理，对于单界面约束条件下，约束界面进行单自由度振动台强迫加速度激励时，任意时刻内部第γ平动自由度的加速度也可直接表示为

$$\ddot{q}_{i_\gamma}=\begin{cases}a(t)+\boldsymbol{\Phi}_\gamma\ddot{\boldsymbol{\xi}}, & \gamma\text{与激励平行}\\ \boldsymbol{\Phi}_\gamma\ddot{\boldsymbol{\xi}}, & \gamma\text{与激励垂直}\end{cases} \tag{26}$$

式中：$\boldsymbol{\Phi}_\gamma$为$\boldsymbol{\Phi}$的第γ行。

在正弦振动工况下，考虑限位非线性响应分析的模态缩聚法，给出了施加强迫加速度和加速度响应还原的途径，可用于分析含限位的产品在力学试验过程中的动力学响应。

1.3 时-频转化方法

通过求解式(23)并代入式(26)，在模拟正弦振动试验工况下，得到弹性体内部任意平动自由度的加速度时域响应$\ddot{q}_{i_\gamma}(t)$。由于间隙限位的存在，数值求解的速度信号在限位接触前后存在类似阶跃变化，导致加速度信号存在较多大幅值高频毛刺，直接使用加速度时域信号进行包络时-频转化会造成频域响应估计偏大。因此，本文基于时域加速度信号滤波时-频转化，更能反映出相应周期运动内加速度的平均统计规律。

设关心的频点为f并考虑变化δf内的时域曲线，则依据式(18)，对应的时间区间为

$$\begin{aligned}t_1&=\frac{60}{\lambda}\log_2\left(\frac{f}{f_0}\right)\\ t_2&=\frac{60}{\lambda}\log_2\left(\frac{f+\delta f}{f_0}\right)\end{aligned} \tag{27}$$

对$[t_1,t_2]$内振动台输入时域曲线和内部第γ平动自由度加速度响应时域曲线分别进行快速傅里叶变换(FFT)，结果记为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{u_1}&=\underset{t\in[t_1,t_2]}{\mathrm{FFT}}\left(a(t)\right)\\ \mathcal{F}_\gamma&=\underset{t\in[t_1,t_2]}{\mathrm{FFT}}\left(\ddot{q}_{i_\gamma}(t)\right)\end{aligned} \tag{28}$$

频响曲线在f处对应加速度频响曲线对应的幅值结果$\mathcal{A}_\gamma(f)$为

$$\mathcal{A}_\gamma(f)=\frac{\left|\mathcal{F}_\gamma(f)\right|}{\left|\mathcal{F}_{u_1}(f)\right|}A(t_1) \tag{29}$$

即输出与输入FFT结果在关心频点处的幅值之比乘以当前频点的振动台输入量级。通过对关心频点f的枚举与循环，可以得到全频段的幅频响应特征。

2 算例分析

2.1 模型介绍

一个典型单自由度驱动机构的有限元模型，主体包括2个镁合金构件和1个驱动机构负载，如图2所示。2个镁合金构件通过转轴处的驱动电机和轴承实现单自由度转动，有限元模型中通过释放转动自由度的MPC实现两者连接，并通过Bush单元模拟了电机的转动刚度。

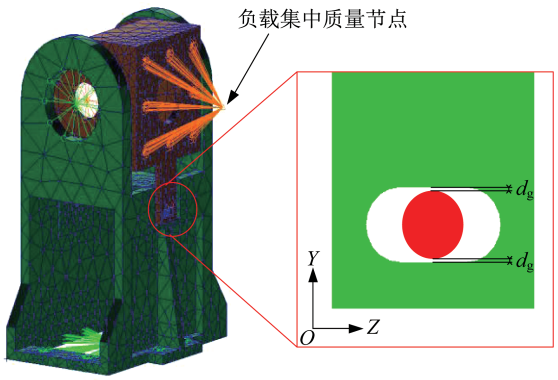

图2 驱动机构有限元模型及限位区域

Fig. 2 Finite element model of the driving mechanism and its limitation region

为抵抗卫星发射过程的主动段载荷和振动，2个镁合金构件通过一处拔销器连接，限制电机转动方向运动，并在入轨后实现火工解锁。拔销器销杆与镁合金结构之间通过限位方式实现约束，如图2右侧所示，腰型孔完全释放对销杆的Z轴方向约束，同时对Y轴方向实现两侧等间隙约束，间隙为d_g。驱动机构有限元模型主要参数见表1。

表 1　模型参数

Tab. 1　Model parameters

参数	参数值
镁合金模量/GPa	45
镁合金泊松比	0.3
镁合金密度/(kg•m^{-3})	1 800
电机转动刚度/(N•m•rad^{-1})	6 000
负载质量/kg	8.0
负载质心处惯量/(kg•m^2)	I_{xx}:0.25；I_{yy}: 0.15；I_{zz}: 0.11
单向接触刚度/(N•m^{-1})	8.5×10^6
间隙d_g/mm	0.3

未锁定状态（销杆与限位孔未接触）和完全限位状态（销杆与限位孔在Y方向依靠接触刚度连接）时，该机构前3阶模态频率及模态振型见表2，销杆与限位孔的接触会极大改变Y方向平动主模态的频率。2种状态主模态的振型均表现为上部结构绕转轴的转动。

表 2　模态频率及模态振型

Tab. 2　Modal frequencies and modal shapes

模态	未锁定状态频率/Hz	完全限位状态频率/Hz	振型
Y方向平动	25.6	59.2	
Y方向扭转	64.1	64.0	
X方向平动	89.5	89.5	

2.2　数值仿真

该机构销杆限位对Y方向特性影响较大，数值仿真分析主要针对Y方向振动试验工况展开。对该驱动机构未锁定状态有限元模型开展模态缩聚，考虑正弦振动频段在100 Hz内，截取保留机构600 Hz内共6阶固定界面主模态，模态阻尼比均设为3%，由此获得式(23)相应的阻尼系数矩阵$\bar{\boldsymbol{C}}_{\xi\xi}$、缩聚刚度矩阵$\bar{\boldsymbol{K}}_{\xi\xi}$、耦合系数矩阵$\bar{\boldsymbol{M}}_{j\xi}^{\mathrm{T}}$、固定界面主模态矩阵$\boldsymbol{\Phi}$等。

模拟Y方向正弦振动试验时，扫描速率设为±4 oct/min，扫描频率范围为正扫5～100 Hz、反扫100～5 Hz，依据式(27)单次扫描总时长约为64.8 s。数值仿真时间推进步长设为1×10^{-5} s，时-频转化δf选为0.2 Hz。

依据上述仿真参数，开展了振动台加速度水平恒定为(0.2～6.0) g条件下的响应仿真计算。部分不同输入下负载质心节点的Y方向加速度响应时域曲线数值仿真结果（含正扫和反扫）和依据式(29)还原的负载质心Y方向加速度频响曲线，如图3所示。图中，红线为正向扫描曲线，蓝线为反扫曲线。

不同输入下正反扫峰值频点的位置和峰值响应相对振动台输入放大率的仿真结果见表3。

通过图表分析对比，可以得出以下结论：

1) 0.2 g输入时，未触发限位，响应峰值发生在25.8/25.2 Hz附近，与未锁定状态Y方向基频相符合（偏移主要由阻尼引起），正、反扫曲线基本一致且曲线形态符合一般线性模型频响特征；

2) (0.4～6.0) g输入时，在特定时刻后触发限位，正扫峰值频点位置随着输入增加不断提高，并逐步接近完全限位状态的基频59.2 Hz，频响曲线在峰值后出现了响应突变下降现象；

3) (0.4～6.0) g输入时，正扫峰值相对振动台输入的放大倍数随着输入水平提高不断增加并逐渐趋于稳定；

4) (0.4～6.0) g输入时，正、反扫曲线的响应特征出现了明显差异，反扫曲线的峰值频点和峰值响应均小于正扫曲线。

上述特性是典型非线性模型所反映出的响应特性，表明基于模态缩聚的限位分析方法能够有效分析并获得此类系统在不同振动输入下的非线性动力学响应特征。

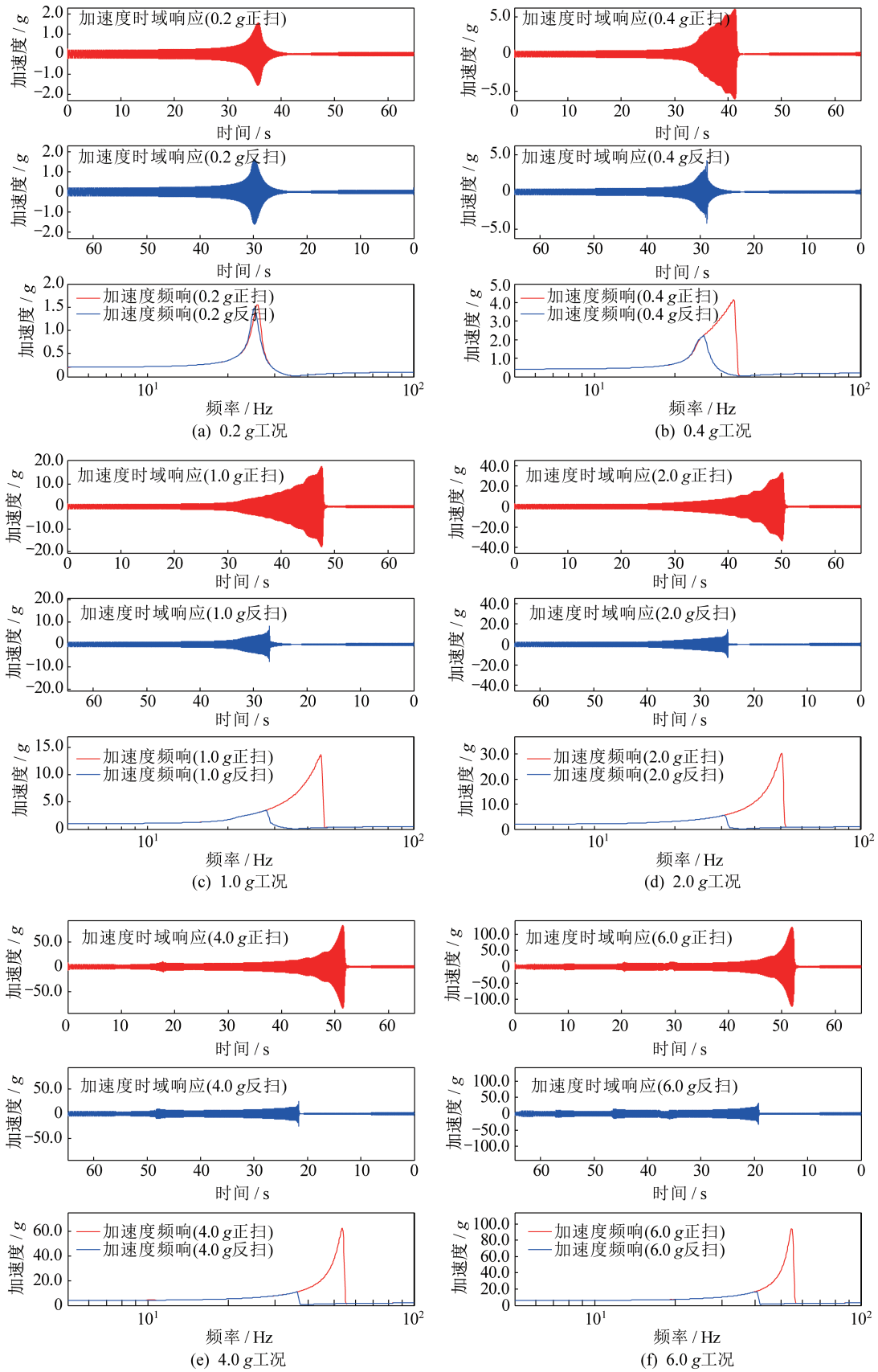

图 3 负载质心 *Y* 方向加速度响应结果

Fig. 3 Acceleration responses of the payload centroid in the *Y*-direction

表 3　峰值频点与响应放大倍数

Tab. 3　Peak frequencies and response amplification ratios

振动台输入/g	正扫		反扫	
	峰值频点/Hz	峰值放大倍数	峰值频点/Hz	峰值放大倍数
0.2	25.8	7.73	25.2	7.40
0.4	33.2	10.35	25.8	5.62
0.6	39.0	12.04	26.6	4.51
0.8	42.4	13.06	27.4	3.91
1.0	44.8	13.69	28.0	3.46
1.5	48.2	14.62	29.6	3.12
2.0	50.6	15.12	30.6	2.75
3.0	52.4	15.46	33.6	2.72
4.0	53.6	15.61	36.2	2.77
5.0	54.2	15.61	38.0	2.67
6.0	54.8	15.72	40.6	2.82

航天领域产品正弦振动试验通常基于线性假设，采用小量级预振来预示满量级响应情况，并可在主频位置采用主动下凹手段减少振动输入，避免产品破坏。算例分析表明，对于该存在限位的驱动机构，小量级（以 0.2 g 为例）预示的主频位置和响应放大特性与大量级（以 4.0 g 为例）存在较大差异，常规试验流程易造成对满量级主频和响应放大特性的误判，造成主动下凹频段选取错误进而“过试验”造成产品损坏。

此外，反扫曲线的峰值频点和峰值响应均小于正扫曲线，从充分考核产品抗力学性能的角度考虑，含限位的机构产品应使用正扫完成正弦振动试验考核，避免因为“欠试验”而未提前暴露风险，应对产品的考核要求予以明确。

为避免“过试验”或者“欠试验”的发生，必须在研制阶段对因限位引起的非线性特性进行仿真预示，了解此类产品在不同振动量级下的响应特性，指导试验的开展，提高试验考核的有效性，基于模态缩聚的限位分析方法为该类仿真问题提供了有效的分析手段。

全尺寸模型和缩聚模型的规模和自由度对比见表4。对于全尺寸模型，由于需要考虑非线性效应，必须采用直接法进行动力学求解，在求解过程中进行限位接触判断。缩聚模型通过模态缩聚方法，可以极大降低针对正弦振动低频工况分析模型的计算规模。

2 个模型频响结果的对比如图 4 所示。在计算精度方面，以 0.4 g 输入下 2 个模型正扫分析为例，

表 4　模型规模与分析时间对比

Tab. 4　Comparisons of model scale and analysis time

项目	全尺寸模型	缩聚模型
节点数（含广义坐标）	15 840	7
单元数	7 706	—
自由度数	95 040	12
单次分析时间/min	1 570	2.0

全尺寸模型和缩聚模型峰值频点分别为 32.6 Hz 和 33.2 Hz，相对误差 1.84%；峰值响应分别为 4.08 g 和 4.14 g，相对误差 1.47%。由此可见，基于缩聚的限位问题分析可保持较高的分析精度。

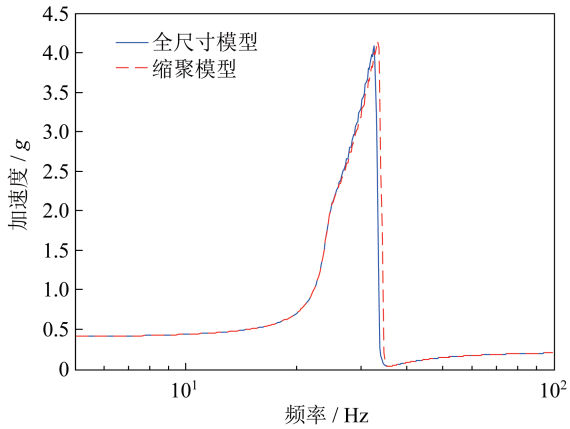

图 4　0.4 g 正扫模型加速度频响结果对比

Fig. 4　Comparison of acceleration frequency responses under 0.4 g forward sweeping

在计算效率方面，表 4 中分析时间对比表明，本算例采用模态缩聚方法（保留前 6 阶主模态）进行单次 5～100 Hz 正弦振动仿真分析的时间仅为全尺寸模型直接法的 0.13%，可以有效提高设计阶段的仿真和优化效率。对于 100 Hz 内具有丰富频率特性的其他含限位结构，模态缩聚方法具有较为显著的优势。

3　结束语

针对含间隙限位的驱动机构类产品非线性动力学问题，本文开展了基于模态缩聚的限位非线性动力学分析方法研究。详细推导了考虑限位接触刚度条件下，模态缩聚后的弹性系统动力学控制方程及其相关参数的求解、提取方法；同时推导了对数扫频“倍频程”模式下正弦振动试验的时域激励输入，并给出了响应结果的时-频转化方法。

通过一个典型的使用拔销器限位的驱动机构模型开展算例分析。分析结果表明，因非线性因素

存在,机构的响应峰值频点和响应放大率会随输入量级而变化,出现了响应频域突变和正、反扫响应不一致等典型非线性特征,验证了本文方法在此类问题上的有效性。相关仿真结果可为机构产品试验过程中避免"过试验"致使产品破坏或"欠试验"致使产品考核不足提供试验流程建议。

本文基于模态缩聚的限位非线性动力学分析方法能够有效揭示因限位引起的非线性动力学现象,并具有较高的分析精度和分析效率,在工程实践中具有较好的使用价值,可为含限位的机构产品力学特性仿真和力学试验的开展提供有力支持。

参考文献

[1] PRAVEENKRISHNA I R, PADMANABHAN C. Experimental and numerical investigations of impacting cantilever beams part 1: first mode response [J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 67: 1985-2000.

[2] KRISHNA I, PADMANABHAN C. Experimental and numerical investigation of impacting cantilever beams: second mode response[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2015, 92:187-193.

[3] 孙樱,万雨婷,陈力奋,等.含单面限位局部非线性结构的主频响应分析[J].振动与冲击,2018,37(18):216-223,250.

[4] CHEN J E, ZHANG W, GUO X Y, et al. Theoretical and experimental studies on nonlinear oscillations of symmetric cross-ply composite laminated plates [J]. Nonlinear Dynamics, 2013, 73(3):1697-1714.

[5] WU M Q, ZHANG W, NIU Y. Experimental and numerical studies on nonlinear vibrations and dynamic snap-through phenomena of bistable asymmetric composite laminated shallow shell under center foundation excitation [J]. European Journal of Mechanics A:Solids, 2021, 89:104303.

[6] 马兴瑞,韩增尧,邹元杰,等.航天器力学环境分析与条件设计研究进展[J].宇航学报,2012,33(1):1-12.

[7] 冯彦军,周徐斌,周宇,等.航天器预复振响应对比分析研究现状综述[J].上海航天(中英文),2017,34(6):96-102.

[8] 吴晓露,黄雷,刘庆宝,等.导弹执行机构的应用与发展[J].飞航导弹,2015(9):85-89.

[9] 王强.基于模态综合法的间隙非线性系统建模及动态特性分析[D].天津:天津大学,2019.

[10] 王强,马志赛,张欣,等.基于模态综合法的含间隙折叠舵面动态特性分析[J].航空学报,2020,41(5):202-210.

[11] 吕铁钢,陈国光.飞行器变形翼张开过程运动特性研究[J].航空兵器,2021,28(6):76-82.

[12] CRAIG R R, Jr, BAMPTON M C C. Coupling of substructures for dynamic analyses[J]. AIAA Journal, 1968, 6(7): 1313-1319.

[13] PAN W B, TANG G A, ZHANG M Y. Modal analysis method for blisks based on three-dimensional blade and two-dimensional axisymmetric disk finite element model [J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2017, 139(5): 052504.

[14] 吴松,秦川,刘松,等.星箭耦合力学分析中的卫星混合模型研究[J].上海航天(中英文),2021,38(6):36-39.

[15] 肖荣军,陈贵如.正弦振动的数学描述与试验技术[J].环境技术,2013,31(3):15-18.

[16] 张韵华,王新茂,陈效群,等.数值计算方法与算法[M].4版.北京:科学出版社,2022.

(上接第 36 页)

[15] 洪昭斌,陈力,李文望.柔性空间机械臂协调运动的鲁棒神经网络控制及柔性振动PD反馈控制[J].力学季刊,2014,35(1):7-12.

[16] YANG J, LI S, YU X. Sliding-mode control for systems with mismatched uncertainties via a disturbance observer [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2013, 60(1): 160-169.

[17] ZHAN B, JIN M, LIU J. Extended-state-observer-based adaptive control of flexible-joint space manipulators with system uncertainties [J]. Advances in Space Research, 2022, 69(8): 3088-3102.

[18] SPONG M W. Modeling and control of elastic joint robots[J]. Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, 1987, 109(4): 310-319.

[19] XIE J, LIU G L, YAN S Z, et al. Study on neural network adaptive control method for uncertain space manipulator[J]. Journal of Astronautics, 2010, 31(1): 123-129.

[20] ELANAYAR S. Radial basis function neural networks for approximation and estimation of nonlinear stochastic dynamics systems[J]. IEEE Trans Neural Networks, 1994, 5(4): 594-603.