基于主成分分析和 Melkman 算法的选星策略

段吉蔚^{1,2,3},俞杭华^{1,2},刘会杰^{1,2,3}

(1.中国科学院 微小卫星创新研究院,上海 201203;2.中国科学院大学,北京 100049;
 3.上海科技大学 信息科学与技术学院,上海 201210)

摘 要:导航定位中的选星算法是一种关键技术,用于从卫星中选择合适数量和最佳几何分布的卫星以实现 最佳定位精度。针对基于二维凸包算法的选星策略在三维卫星数据降维处理中忽略垂直方向高度位置信息的问 题,提出了一种基于主成分分析(PCA)和二维凸包 Melkman 算法的选星策略。首先,通过 PCA技术将三维卫星数 据投影到新的二维坐标系,新的二维数据同时保留水平平面位置信息和垂直方向高度位置信息,旨在降低维度的 同时最小化信息损失。在新坐标系下,数据经过预处理后,采用二维凸包 Melkman 算法进行选星。实验结果显示: 相较于直接投影到站心坐标系下的二维凸包选星算法,提出的选星算法不仅更准确地描述卫星的位置信息,使问 题研究更加完备,还在保持相近仿真耗时的前提下,实现了较大的几何精度因子(GDOP)性能提升。

关键词:选星策略;主成分分析(PCA);凸包;Melkman 算法;几何精度因子(GDOP)
 中图分类号:TN 965 文献标志码:A DOI: 10.19328/j.cnki.2096-8655.2023.04.008

A Satellite Selection Strategy Based on Principal Component Analysis and Melkman Algorithm

DUAN Jiwei^{1,2,3}, YU Hanghua^{1,2}, LIU Huijie^{1,2,3}

(1.Innovation Academy of Microsatellites of Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201203, China; 2.University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China; 3.School of Information Science and Technology, Shanghai Tech University, Shanghai 201210, China)

Abstract: The satellite selection algorithm in navigation and positioning is a key technology used to select the appropriate number and optimal geometric distribution of satellites from the existing ones, aiming at achieving optimal positioning accuracy. In order to address the problem that the satellite selection strategy based on two-dimensional convex hull algorithms ignores the vertical height and position information in three-dimensional satellite data dimensionality reduction processing, a satellite selection strategy based on the principal component analysis (PCA) and two-dimensional convex hull Melkman algorithm is proposed. First, the PCA is used to project three-dimensional satellite data into a new two-dimensional coordinate system, which preserves both the horizontal plane position information loss. In the new coordinate system, after preprocessing the data, the two-dimensional convex hull satellite selection algorithm directly projected into the station center coordinate system, the proposed satellite selection algorithm not only can describe the position information of satellites more accurately and thus make the problem research more complete, but also can achieve significant geometric dilution of precision (GDOP) performance improvement while maintaining similar simulation time.

Key words: satellite selection strategy; principal component analysis (PCA); convex hull; Melkman algorithm; geometric dilution of precision (GDOP)

作者简介:段吉蔚(1998—),男,硕士研究生,主要研究方向为卫星导航定位。

通信作者:刘会杰(1972—),男,博士,研究员,主要研究方向为信号特性分析与波形设计、阵列信号处理、自组织网络通信等。

收稿日期:2023-04-10;修回日期:2023-05-07

0 引言

随着北斗卫星导航系统(Beidou Navigation Satellite System, BDS)的全面运行,北斗、全球定 位系统(Global Positioning System, GPS)、Galileo 和 Glonass 系统等4 大全球卫星导航系统(Global Navigation Satellite System, GNSS) 在轨卫星数量 共计已超过百颗^[1]。与利用单系统导航定位的方 式相比,多系统融合定位可以充分利用多系统的 可见卫星,实时可见卫星数量更多、分布更好,有 利于提高导航定位服务的精度和可用性。然而, 如果将多系统所有可见卫星均用于导航定位计 算,虽然理论上定位精度最优,但计算效率降低, 对应用终端的资源需求大,且严重影响导航定位 的实时性。合适的选星策略可以在保证定位精度 的同时,降低计算复杂度,提高导航定位的实时 性,增强大多数 GNSS 应用。因此,对 GNSS 多系 统融合导航定位选星策略的研究具有重要的理论 和实际意义。

目前,选星算法的研究方向主要有以下3个方 面。1)利用智能优化算法进行选星。文献[2]提 出了一种基于灰狼优化(Grey Wolf Optimizer, GWO)算法的快速选星方法,该算法利用自适应 收敛因子和信息反馈机制,在局部寻优与全局搜 索之间实现平衡。文献[3]提出了一种基于 NSGA-II算法的多目标快速选星方法,该算法通 过不断的选择不同的遗传算子和效用函数做实 验,最终选取一组合适的遗传算子和效用函数做 出最优的选星决策,并且不依赖于卫星的几何位 置分布,可适用于有障碍或者遮挡的复杂情况。 文献[4]提出了一种基于K-means++聚类算法的 快速选星算法,该方法优先选择仰角最大的一颗 卫星后,对剩余卫星进行K-means++聚类算法, 然后在每个簇中选择一颗卫星,得到最终的选星 组合。以上算法会导致较高的计算复杂度,增加 选星所需要的时间,对实时性要求较高的应用场 景可能不太适用。2) 根据可见卫星的几何空间分 布进行选星。文献[5]通过实验发现了可见星的 空间分布规律,提出了一种基于卫星高度角和方 位角进行分区筛选的快速选星算法。文献[6]根 据最佳选星方案的卫星分布特性,通过利用卫星 高度角和方位角信息进行区域划分,并引入代价 函数筛选中仰角区域的卫星,从而得到最终的选

星方案。文献[7]分析了几何精度因子(Geometric Dilution Precision, GDOP),与可见卫星布局的 关系,确定各个卫星对GDOP的贡献值,选择贡献 值大的卫星作为最终用于定位解算的卫星组合。 3)利用计算几何学中的凸包算法进行选星。文献 [8]提出用三维凸包算法进行选星定位,虽然该算 法考虑了卫星在三维空间中的分布,能够在选星 过程中找到更有利于定位的卫星子集,但是三维 凸包算法在计算时的复杂度较高,无法满足实时 性的要求。因此为了提高实时性,文献[9]提出将 三维卫星数据降为二维,然后利用二维凸包 Graham算法进行快速选星,但是该选星算法将三 维卫星数据直接投影到站心坐标系下的水平平 面,但可能会忽略高度方向上的影响,导致选择的 卫星几何分布不够理想,从而影响定位精度。

综上所述,基于二维凸包算法的选星策略在处 理三维卫星数据降维时,常忽略垂直方向的高度位 置信息,为解决该问题,本文提出了一种融合主成 分分析(Principal Component Analysis, PCA)与二 维凸包 Melkman 算法的选星策略。该策略利用 PCA技术在降维过程中最大限度地减小信息损失, 确保生成的二维数据不仅保留了原始三维数据的 水平信息,还包含了高度方向的信息。在后续选星 计算中,能更准确地描述卫星的位置信息,其对于 选星策略至关重要。此外,本文采用时间复杂度较 低的 Melkman 算法进行选星计算,以提高选星 速度。

1 几何精度因子

GDOP 是卫星导航系统中一个重要指标,其代 表卫星导航系统测距误差造成的接收机与空间卫 星间的距离矢量放大因子^[10]。导航卫星的定位误 差的标准偏差δ定义如下:

$$\delta = G_{\text{DOP}} \bullet \sigma_{\text{UERE}} \tag{1}$$

式中: σ_{UERE} 为伪距测量误差。 从式(1)可知, 在伪距测量误差相同的情况下,

导航定位精度完全由GDOP决定,卫星几何分布越优,GDOP越小,导航精度越高。GDOP的推导过程如下:

$$H = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \sin\beta_1 & \cos\alpha_1 \cos\beta_1 & \sin\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos\alpha_N \cos\beta_N & \cos\alpha_N \sin\beta_N & \sin\alpha_N \end{bmatrix}$$
(2)

式中:*H*为BDS/GPS/GLONASS中某单一卫星系 统观测矩阵的前3列;α为导航卫星的仰角;β为导 航卫星的方位角;N为单一系统参与定位解算的卫 星的数量。

由于本文选取导航星座中的BDS、GPS和GLONASS这3个系统卫星进行选星,因此这里只考虑BDS/GPS/GLONASS组合导航系统的观测矩阵:

$$G = \begin{bmatrix} H_{\text{BDS}} & 1_{\text{BDS}} & 0_{\text{BDS}} & 0_{\text{BDS}} \\ H_{\text{GPS}} & 0_{\text{GPS}} & 1_{\text{GPS}} & 0_{\text{GPS}} \\ H_{\text{GLO}} & 0_{\text{GLO}} & 0_{\text{GLO}} & 1_{\text{GLO}} \end{bmatrix}$$
(3)

式中: I_x 、 $O_x(x \Rightarrow BDS \ GPS \ GLONASS)$ 分别为 $k \times$ 1维的全1、全0向量; $k \Rightarrow$ 当前系统x用于定位解算 的卫星数量。

则 GDOP 可以表示为^[11]

$$G_{\rm DOP} = \sqrt{\operatorname{trace}(\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G})^{-1}} \qquad (4)$$

GDOP数值与定位精度的关系见表1^[12]。

表1 GDOP与定位精度的评价关系

 Tab. 1 Evaluation relationship between the GDOP and positioning accuracy

$G_{ ext{dop}}$	定位精度	
<1	理想	
1~2	优秀	
2~5	良好	
5~10	中等	
10~20	一般	
20~50	差	

2 基本原理

2.1 主成分分析的原理

PCA方法的基本思想是通过将数据投影到最大方差的方向上,找到数据中最主要的模式和结构,并且保留尽可能多的信息^[13]。利用PCA算法将 三维卫星数据降为二维时,通常需要经过以下 步骤^[14-16]:

 对原始数据进行标准化。假设有 n个卫星 数据样本,每个样本有3个特征(x,y,z),对于每个 特征,计算其均值μ和标准差σ,然后将每个特征的 值减去其均值,再除以其标准差,以使每个特征具 有相同的权重,将标准化后的数据整理为一个 n×3 的矩阵*X*_{std}。以特征*x*为例,标准化的过程可以用以下公式描述:

$$x' = \frac{x - \mu}{\sigma} \tag{5}$$

式中:μ为特征 x 的均值;σ为特征 x 的标准差。

2) 计算标准化后的数据矩阵*X*_{std}的协方差矩阵 *S*。协方差矩阵可以用以下公式计算:

$$S = \frac{1}{n} X_{\rm std}^{\rm T} X_{\rm std} \tag{6}$$

3) 对协方差矩阵进行特征值分解,得到特征值 和特征向量。特征值和特征向量可以用以下公式 计算:

$$Sv_i = \lambda_i v_i \tag{7}$$

式中: v_i 为第i个特征向量; λ_i 为第i个特征向量对应的特征值。

4)选择主成分。将特征值按降序排列,选取前 k个最大特征值对应的特征向量作为数据降维 后的新坐标系的基向量,组成新的特征向量矩阵 V_k。在本文中,由于要将三维数据降为二维,因此 k=2。

5) 将原始数据投影到新的特征向量上,得到降 维后的数据。新矩阵 Y的每一行表示原始数据在 新特征空间的坐标。

$$Y = X_{\rm std} V_k \tag{8}$$

以上5个步骤的流程如图1所示。



Fig.1 Flowchart of the PCA algorithm

通过遵循上述5个步骤,可以使用PCA算法将 原始三维卫星数据有效地降至二维空间。由于该 新的二维空间中的基向量是原始数据空间的线性 组合,且相互正交,因此降维后的二维数据不仅保 留了原始三维卫星数据的水平位置信息,还保留了 高度位置信息,为后续选星计算提供了一个更精确 地描述卫星位置信息的有效方式。

2.2 Melkman 算法原理

凸句的公式表达如下:在一个实数向量空间V 中,对于给定集合X,所有包含X的凸集的交集 *CH*(*X*)被称为*X*的凸包^[17],即:

$$CH(X):=\bigcap_{X\subseteq K\subseteq V}K$$
(9)

X的凸包CH(X)可以用X内所有点的线性组 合来构造:

$$CH(X):=\left\{\sum_{j=1}^{n} t_{j} x_{j} | x_{j} \in X, \sum_{j=1}^{n} t_{j} = 1, t_{j} \in [0, 1]\right\} (10)$$

二维凸包是将平面上给定的点集用一个最小 的凸多边形包围的形状。对于二维凸包的计算,可 以使用不同的算法来实现,包括暴力、Graham 扫描、 Jarvis 步进、QuickHull 算法、Melkman 算法等^[18-21]。 其中,Melkman 算法的时间复杂度为O(n),其比大 多数其他算法(如 Graham 扫描法、分治法和 Andrew's Monotone Chain Algorithm)的 O(nlogn) 时间复杂度更低[22],这意味着在处理二维凸包问题 时,Melkman算法可以更快地找到解决方案。因此 本文采用Melkman算法进行凸包计算。Melkman 算法的核心思想是利用Deque来维护凸包边界上的 点。算法的具体步骤如下[23]:

1) 对输入数据进行预判断,确保至少有3个 点。如果输入数据少于3个点,则无法构成多边形, 无需计算凸包。

2) 初始化双端队列 (Double-ended Queue, Deque)。在所有点中找出具有最小x值的点A,然 后确定一个处理顺序,例如逆时针方向,计算剩余 点与点A形成的向量与y轴负方向的夹角,再根据 这些夹角将点集按从小到大的顺序进行排序,最 后,将排序后的前两个点(点A和点B)加入Deque。

3) 按顺序处理剩余的点,记当前处理的点为 C。进行以下操作:①检查队列的头部。如果C与 队列头部的前2个点构成一个右拐(顺时针方向),

则队列头部的第一个点出队。重复此操作,直到队 列头部的2个点与C构成一个左拐(逆时针方向)为 止。② 检查队列的尾部。如果C与队列尾部的后2 个点构成一个左拐(逆时针方向),则队列尾部的第 1个点出队。重复此操作,直到队列尾部的2个点与 C构成一个右拐(顺时针方向)为止。③将点C添 加到队列的尾部。

值得注意的是:判断3点之间的相对方向(左拐 或右拐)可以通过计算向量积(Cross Product)来实 现。例如,有3个点A、B和C,那么如果向量AB与 向量BC的向量积大于0,则表示点C在AB的逆时 针方向(左拐);反之,如果向量积小于0,则表示点C 在AB的顺时针方向(右拐)。

4) 重复步骤3,直到所有点都被处理。

5) 当所有点处理完毕后, Deque 中的点即为凸 包上的顶点。从队列头部到尾部,按顺序连接这些 顶点,就可以得到凸包的边界。Melkman算法的流 程如图2所示。





3 基于PCA和Melkman的选星算法

3.1 选星算法执行步骤

本文针对 BDS/GPS/GLONASS 三模导航定 位系统提出了一种基于 PCA 和 Melkman 的选星算 法,具体实验步骤如下所述:

1)根据卫星广播星历信息,分别计算卫星在 BDS、GPS、GLONASS坐标系统下的坐标、仰角和 方位角。虽然3个导航系统的坐标系统不相同,但 是其均为笛卡尔坐标系,可以根据文献[24]和文献 [25]将3个坐标系统一转换到GPS系统的WGS-84 坐标系下进行定位解算。

2) 将卫星原始三维数据通过2.1 章分析的 PCA技术投影到新的二维坐标系下。

3) 对二维平面的数据进行预处理,筛选掉不在 凸包边界上的卫星数据。具体步骤如下:① 找到x坐标、y坐标最小、最大的4个点,分别记为 P_{x-min} $(x_{min}, y_1), P_{x-max}(x_{max}, y_2), P_{y-min}(x_1, y_{min}), P_{y-max}(x_2, y_{max}), 显然,这4个点都在凸包的边界上。② 将横坐$ $标介于<math>x_1$ 和 x_2 之间,纵坐标介于 y_1 和 y_2 之间的点(图 3中的D区域)从点集中剔除掉,因为D区域的点不 可能在凸包的边界上。



图 3 数据预处理的卫星分类 Fig. 3 Satellite classification for data preprocessing

为了提高 Melkman 算法在二维凸包扫描中的 优化效果,首先分析了已有凸包扫描结果,发现当 卫星位于图3中的区域D时,假设该点在凸包边界 上,则该点与图3中已知的4个凸包边界上的点围 成的"凸包"违反了凸包的性质:凸包上的任意2点 之间的线段都完全位于凸包内部或边界上,因此, 该假设不成立,可以确定区域D内的卫星一定不在 二维凸包边界上。基于该发现,可以针对卫星数据 进行预处理,减少后续 Melkman 算法需要扫描的卫 星数量,从而提高整体选星效率。

4) 对新的二维数据预处理之后,基于2.2 章分 析的 Melkman 算法找到筛选后的点集的凸包。

5) 凸包点即为最终选择用于用户定位解算的 卫星,找到凸包点对应的卫星三维数据,计算选星 后的GDOP值。

3.2 选星算法仿真分析

为了验证本文提出选星算法的性能,本文用投影到站心坐标系XOY平面的二维凸包Melkman选 星算法与基于PCA和Jarvis步进法的选星算法作为 对比实验,对上海市(121.47°E,31.23°N)位置进行 选星实验,选取导航星座中的BDS、GPS和 GLONASS系统的卫星,为保证实验准确性,卫星 位置由星历计算得出,同时将卫星的高度截止角设 定为5°,仿真实验的起始时间为UTC时间2023年 2月26日00:00:00,持续时间为24h,每1h进行一 次采样,共计24个采样点。选星算法的流程如图4 所示。



Fig. 4 Flowchart of the satellite selection algorithm

UTC时间14:00:00使用PCA算法生成的新的 二维平面如图5所示。UTC时间14:00:00使用 PCA算法将原始三维卫星数据投影至新的二维平 面的分布如图6所示。









Fig. 6 Scatter plots in the two-dimensional PCA plane

预处理剔除的无关卫星数量变化如图7所示。 可以发现,无论是投影到XOY坐标系,还是PCA投 影生成的新坐标系下,在大多数时刻都会剔除较多的 无关卫星数,在19:00时刻甚至可以减少18颗无关卫 星数据,可为后续Melkman算法减少了大量的扫描卫 星数,提高了整体算法扫描二维凸包的选星速度。

投影到站心坐标系 XOY 平面的二维凸包 Melkman选星算法和本文提出选星算法这2种算法 的选星数量如图8所示。可以发现,在大部分时间 里,本文所提算法的选星数量要多于投影到站心坐 标系 XOY 平面的二维凸包 Melkman选星算法的选 星数量,为后续定位解算提供了更多的观测数据, 从而进一步提高定位精度。

XOY-Melkman与PCA-Melkman这2种选星算法GDOP曲线和运行时间曲线,如图9和图10所示。 PCA-Jarvis与PCA-Melkman选星算法运行时间曲



Fig. 7 Number of satellites removed by preprocessing



图 8 XOY-Melkman与PCA-Melkman算法的选星数量 Fig. 8 Numbers of selected satellites obtained by the XOY-Melkman and PCA-Melkman algorithms

线,如图11所示。3种选星算法的选星数、GDOP和 运行时间进行列表分析,见表2。如图9所示,本文所 提选星算法在60%的时间里实现了GDOP小于2, 而在其余40%的时间里GDOP值介于2~3.5之间, 根据表1中GDOP与定位精度的关系,说明本文所提 选星算法在一天中的60%时间能够达到优秀的定位 精度,而在剩下的40%时间能够获得良好的定位精 度。相对而言,投影到站心坐标系XOY平面的二维 凸包 Melkman 选星算法仅有 25% 的时间达到优秀的 定位精度。结合图10和表2,可以发现本文所提选星 算法的平均运行时间为0.0020s,投影到站心坐标系 XOY平面的二维凸包 Melkman 选星算法的平均运 行时间为0.0011s,虽然运行效率降低,但是本文所 提选星算法能够实现更优的 GDOP 性能, 即平均 GDOP性能可以提升0.3840。结合图11和表2,本 文所提选星算法与 PCA-Jarvis 选星算法获取的 GDOP性能一样,但是本文所提算法的平均运行时间 却只有PCA-Jarvis选星算法的三分之一。因此,从 选星结果的角度来看,本文提出的选星算法是一种可

行的选星策略,可以为实时定位、精确测量等领域提 供高效可靠的解决方案。



图 9 XOY-Melkman 与 PCA-Melkman 选星算法 GDOP 性 能对比

Fig. 9 Comparison of the GDOP obtained by the XOY-Melkman and PCA-Melkman satellite selection algorithms



图 10 XOY-Melkman 与 PCA-Melkman 选星算法运行时间 对比

Fig. 10 Comparison of the running time obtained by the XOY-Melkman and PCA-Melkman satellite selection algorithms



图 11 PCA-Jarvis 与 PCA-Melkman 选星算法运行时间对比

Fig. 11 Comparison of the running time obtained by the PCA-Jarvis and PCA-Melkman satellite selection algorithms 表2 3种选星算法卫星数、GDOP与运行时间对比

Tab. 2 Comparison of the results of satellite number, GDOP, and running time obtained by three satellite selection algorithms

参数		PCA-Melkman 选星算法	<i>XOY</i> -Melkman 选星算法	PCA-Jarvis 选星算法
卫星 数/颗	范围	9~15	7~11	9~15
	均值	11	9	11
GDOP	范围	1.420 2~ 3.281 1	$1.459.6 \sim 4.519.4$	1.420 2~ 3.281 1
	均值	2.106 0	2.490 0	2.106 0
	标准差	0.567 7	0.766 0	0.567 7
运行 时间/s	范围	0.001 5~ 0.034 0	0.000 8~ 0.001 9	0.004 9~ 0.011 1
	均值	0.002 0	0.001 1	0.007 0
	标准差	0.000 5	0.000 3	0.001 7

4 结束语

本文针对二维凸包选星算法在处理三维卫星数 据降维过程中对高度位置信息的忽略,提出了一种基 于 PCA 和 Melkman 算法的选星策略。该策略运用 PCA 技术在降维时最大程度地减小信息损失,生成 的二维数据不仅保留了原始三维数据的水平信息,还 包含了高度方向的信息,从而在后续选星计算中能更 准确地反映卫星位置。同时,该策略采用时间复杂度 较低的 Melkman 算法计算凸包,以提高选星速度。 实验结果显示,相较于将数据投影到站心坐标系 XOY平面的二维凸包 Melkman选星算法,本文提出 的选星算法实现了更优的 GDOP性能,平均 GDOP 性能提升了 0.384 0;相较于 PCA-Jarvis选星算法,本 文所提算法的平均运行时间仅有 PCA-Jarvis选星算 法的三分之一。因此,本文所提出的选星策略在运行 速度和定位精度方面具有明显优势。

参考文献

- [1] MENG F C, WANG S, ZHU B C. Research of fast satellite selection algorithm for multi-constellation [J]. Chinese Journal of Electronics, 2016, 25(6): 1172-1178.
- [2]余德荧,李厚朴,纪兵,等.基于灰狼优化算法的快速选 星方法[J/OL].系统工程与电子技术,2022:1-10.
- [3] 徐小钧,马利华,艾国祥.基于NSGA-Ⅱ算法的多目标 快速选星方法[J]. 天文研究与技术,2018,(3): 292-301.
- [4] XU T, LI J, LIU X. A fast satellite selection algorithm for GPS/BD integrated navigation system based on

- [5] 李国弘,谢劭峰,周志浩,等.GPS/BDS/GLONASS组 合系统相对定位选星算法[J].科学技术与工程,2019, (10):21-25.
- [6] 刘帅,赵国荣,高超,等.GPS/北斗组合卫星导航系统 快速选星算法[J].电光与控制,2017,(3): 32-35.
- [7] ZHANG P. Research on satellite selection algorithm in ship positioning based on both geometry and geometric dilution of precision contribution [J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2019, 16(1): 1-6.
- [8] BLANCO-DELGADO N, NUNES F D. Satellite selection method for multi-constellation GNSS using convex geometry [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2010, 59(9): 4289-4297.
- [9]杨松,张显云,杜宁,等.基于凸包Graham扫描法的多 系统融合精密单点定位快速选星算法[J].大地测量与 地球动力学,2018(2):181-186.
- [10] 邱致和,王万义.GPS原理与应用[M].北京:电子工业 出版社,2004.
- [11] 彭攀,范鑫,徐伟证,等.面向导航增强的低轨星座设计 与应用[J].上海航天,2021,38(6):28-35.
- [12] NALINEEKUMARI A, RAO G S, KUMAR A. GDOP analysis with optimal satellites using ga for southern region of Indian subcontinent [J]. Procedia Computer Science, 2018, 143: 303-308.
- [13] KARAMIZADEHS, ABDULLAHSM, MANAFAA, et al. An overview of principal component analysis [J]. Journal of Signal and Information Processing, 2013, 4 (3B): 173.
- [14] ANOWAR F, SADAOUI S, SELIM B. Conceptual and empirical comparison of dimensionality reduction algorithms (PCA, KPCA, LDA, MDS, SVD, LLE,

ISOMAP, LE, ICA, t-SNE) [J]. Computer Science Review, 2021, 40: 100378.

- [15] UDDIN M P, MAMUN M A, HOSSAIN M A. PCAbased feature reduction for hyperspectral remote sensing image classification [J]. IETE Technical Review, 2021, 38(4): 377-396.
- [16] 刘佳.数学建模中的主成分分析法[J].科技视界, 2014 (15): 223-224.
- [17] 韩天祥.GNSS多系统选星策略的研究[D].上海:上海 交通大学,2014.
- [18] 杨世伟.基于GPU的稀疏矩阵向量乘和凸包算法研究 [D].南京:南京邮电大学,2019.
- [19] 李可,高清维,卢一相,等.基于区域正交化分割的平面 点集凸包算法[J].自动化学报,2022,48(12):2972-2980.
- [20] 孙殿柱,朱昌志,李延瑞,等.三维散乱点云凸包快速求 解算法[J].机械设计与研究,2009,25(4):11-13.
- [21] AN P T, HUYEN P T T, LE N T. A modified Graham's convex hull algorithm for finding the connected orthogonal convex hull of a finite planar point set[J]. Applied Mathematics and Computation, 2021, 397: 125889.
- [22] SETIABUDI D H. Uji Kesehatan Algorithm Convex-Hull: Graham dan Melkman [J]. Jurnal Teknik Elektro, 2002, 2(1):27-31.
- [23] MEI G, TIPPER J C, XU N. An algorithm for finding convex hulls of planar point sets [C]//Proceedings of 2012 2nd International Conference on Computer Science and Network Technology. IEEE, 2012: 888-891.
- [24] 李鹤峰,党亚民,秘金钟,等.BDS与GPS、GLONASS 多模融合导航定位时空统一[J].大地测量与地球动力 学,2013,33(4):73-78.
- [25] 陈倩,易炯.全球4大卫星导航系统浅析[J].导航定位 学报,2020,8(3):115-120.